Algebraische Automatentheorie

Blatt 7, 2018-12-06

Aufgabe 1 [12 PUNKTE]

Gegeben sei eine Galois-Verbindung $f \dashv g$ zwischen zwei vollständigen Verbänden $\langle P, le \rangle$ und $\langle Q, \sqsubseteq \rangle$. Insbesondere gilt also $id_P \leq f; g$ und $g; f \sqsubseteq id_Q$. Die Mengen P' und Q' mögen aus den jeweiligen Fixpunkten bestehen. Zeigen Sie: $\langle P', \leq \rangle$ und $\langle Q', \sqsubseteq \rangle$ sind ismomorphe vollständige Vergände.

Aufgabe 2 [12 PUNKTE]

für eine Äquivalenzrelation E auf der Trägermenge einer Halbgruppe $\langle S, \cdot \rangle$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(a) E ist eine Kongruenzrelation;

(b) E ist eine Unter-Halbgruppe von $S \times S$, d.h.,

$$\forall a, b, c, d \in S. \Big(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in E \implies \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle a \cdot c, b \cdot d \rangle \in E \Big)$$

Weiterhin implizieren diese Bedingungen:

(c) E satisfies

$$\forall u, v \in S. \Big(\langle u, v \rangle \in E \implies \forall x, y \in S. \langle x \cdot u \cdot y, x \cdot v \cdot y \rangle = \langle x, x \rangle \cdot \langle u, v \rangle \cdot \langle y, y \rangle \in E \Big)$$

Falls S ein Monoid ist, sind alle drei Bedingungen äquivalent.

Aufgabe 3 [12 PUNKTE]

Betrachte zwei Quantale U und V , d.h., vollständigen Verbände mit Monoidstruktur, so dass due Supremum-Abildung ein Monoid-Homomorphismus ist. Weiter sei $f \dashv g$ eine Adjunktion zwischen den vollständigen Verbänden.

Zeigen Sie: f ist genau dann oplax hinsichtlich der Monoid-Struktur, wenn g lax ist.

Abgabe: Donnerstag, 2018-12-13, 13:15