Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

Dr. Jürgen Koslowski

Algebraische Automatentheorie

Blatt 9, 2019-01-24

Aufgabe 1 [12 Punkte]

Beweisen Sie Proposition 5.12.01 des Skripts: $\mathscr{A}$ sei eine kleine Kategorie.

1. Die Funktor-Kategorie $[\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{set}]$ ist vollständig und co-vollständig, d.h., hat alle kleinen Limiten und Colimiten.
2. Die Yoneda-Einbettung $\mathscr{A} \xrightarrow{\boldsymbol{Y}} [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{set}]$ erhält alle Limiten, die in $\mathscr{A}$ existieren, aber keine nicht-trivialen Colimiten.
3. Jeder Funktor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{B}$ in eine co-vollständige Kategorie hat eine eindeutige Erweiterung $[\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{set}] \xrightarrow{\bar{F}} \mathscr{B}$, die $F = \boldsymbol{Y} \,;\, \bar{F}$ erfüllt und alle Colimiten erhält. ($\mathscr{A} \xrightarrow{\boldsymbol{Y}} [\mathscr{A}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{set}]$ ist die Yoneda-Einbettung.)

Aufgabe 2 [12 Punkte]

Leiten Sie, ausgehend von der offensichtlichen Dualtät zwischen den Kategorien $\boldsymbol{set}_f$ der endlichen Mengen und $\boldsymbol{ba}_f$ der endlichen Boole'schen Algebren, folgende Dualitäten her, indem Sie geeignete $\boldsymbol{ind}$ - bzw $\boldsymbol{pro}$ -Konstruktionen anwenden:

- zwischen der Kategorie $\boldsymbol{set}$ und der Kategorie $\boldsymbol{caba}$ der vollständigen atomaren Boole'schen Algebren;
- zwischen der Kategorie $\boldsymbol{stone}$ und der Kategorie $\boldsymbol{ba}$ aller Booleschen Algebren.

Verfahren Sie auf analoge Weise mit der Dualität zwischen der Kategorie $\boldsymbol{pos}_f$ endlicher geordneter Mengen mit monotonen Abbildungen und der Kategorie $\boldsymbol{dl}_f$ der endlichen distributiven Verbände mit Verbandshomomorphismen.

Abgabe: Donnerstag, 2019-02-31, 13:15