

Übungen zur Vorlesung
Bäume, Ordnungen und Anwendungen
Blatt 2

Juniorprof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 05.11.2013 um 14h

Aufgabe 2.1 (Distributivität)Seien (D, \leq) ein Verband und $x, y \in D$.

- a) Zeigen Sie: Ist $f : D \rightarrow D$ monoton, so gilt $f(x \sqcup y) \geq f(x) \sqcup f(y)$.
- b) $f : D \rightarrow D$ heißt *distributiv*, falls $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$.
Zeigen Sie: Falls f distributiv ist, so ist f auch monoton.

Aufgabe 2.2 (Distributivität)

Sei (D, \leq) ein vollständiger Verband, der die aufsteigende Kettenbedingung (ACC) erfüllt.
Zeigen Sie: Ist f distributiv, so gilt für alle $Y \subseteq D, Y \neq \emptyset$: $f(\bigsqcup Y) = \bigsqcup \{f(y) \mid y \in Y\}$.

Aufgabe 2.3 („Reachable Values“-Analyse)

Betrachten Sie das folgende boolesche Programm:

```

1:  $x := \text{true}$ 
2:  $y := \text{true}$ 
3: while  $x$  do
4:    $y := \neg x$ 
5:   if  $\neg y$  then
6:      $x := \neg x$ 
7:      $x := \neg y$ 
8:   endif
9: done

```

Untersuchen Sie, welche Belegungen die Variablen bei den jeweiligen Labels annehmen können. Seien dazu \mathcal{L} die Menge der Labels in diesem Programm und $\{\text{false}, \text{true}\}^{\{x,y\}}$ die Menge der möglichen Variablenbelegungen. Gehen Sie davon aus, dass zu Beginn $x = y = \text{false}$ gilt.

- a) Geben Sie ein Gleichungssystem für Funktionen $v_{in}, v_{out} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}(\{\text{false}, \text{true}\}^{\{x,y\}})$ an, die die möglichen Variablenbelegungen vor und nach Ausführung eines Befehls in \mathcal{L} beschreiben. Für die ersten Labels gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
 v_{in}(1) &:= \{(x = \text{false}, y = \text{false})\} & v_{out}(1) &:= f_{x:=\text{true}}(v_{in}(1)) \\
 v_{in}(2) &:= v_{out}(1) & v_{out}(2) &:= ?
 \end{aligned}$$

Dabei ist $f_{x:=\text{true}}$ eine Funktion, die eine Menge von Belegungen M so ändert, dass anschließend $x = \text{true}$ gilt. Ist zum Beispiel die Belegung $(x = a, y = b) \in M$, dann enthält $f_{x:=\text{true}}(M)$ die Belegung $(x = \text{true}, y = b)$.

- b) Berechnen Sie eine Lösung für dieses Gleichungssystem, indem Sie eine Fixpunktiteration auf $v_{in}(l) = v_{out}(l) = \emptyset$ für alle Labels durchführen.

Abgabe bis 05.11.2013 um 14h im Kasten neben Raum 34-401.4