Übungen zur Vorlesung
Bäume, Ordnungen und Anwendungen
Blatt 7

Juniorprof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 10.12.2013 um 14h

**Aufgabe 7.1** (Analyse mit beschränkter Rekursionstiefe)
Der funktionale Ansatz zur Analyse rekursiver Programme kann unpräzise sein. Das Transferverhalten von Prozeduren wird allgemein bestimmt, ohne den Kontext zu berücksichtigen, aus dem die Prozedur aufgerufen wird.
Geben sie an, wie man ein rekursives Programm so umschreiben kann, dass eine Analyse bis zu einer bis zu einer vorher festgelegten Rekursionstiefe präzise ist.

*Hinweis:* Sie sollen keine Call-Strings definieren oder eine neue Theorie einführen. Es reicht, das Programm in geeigneter Weise umzuschreiben.

**Aufgabe 7.2** (Galois-Verbindungen)
Geben Sie im Folgenden jeweils an, ob das Paar $(\alpha, \gamma)$ eine Galoisverbindung ist. Bei den Paaren, die keine Galoisverbindungen sind, geben Sie jeweils ein Gegenargument bzw. Gegenbeispiel an.

| | $L$ | $M$ | $\alpha$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$ | $(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ | $z \mapsto \{z\}, -\infty \mapsto \emptyset, \infty \mapsto \mathbb{Z}$ | $m \mapsto \bigsqcup\{z \mid z \in m\}$ |
| 2 | $(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ | $(\mathbb{Z}, \leq)$ | $l \mapsto \bigsqcup\{z \mid z \in l\}$ | $z \mapsto \{z\}, -\infty \mapsto \emptyset, \infty \mapsto \mathbb{Z}$ |
| 3 | $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \sqsubseteq)$ | $(\mathbb{Z}^2_{\pm\infty}, \sqsubseteq^2)$ | $l \mapsto (l, l)$ | $(l_1, l_2) \mapsto l_1$ |
| 4 | $(\mathbb{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ | $(\operatorname{conv} \mathbb{R}^2, \subseteq)$ | $l \mapsto \operatorname{conv}(l)$ | $m \mapsto m$ |

Dabei sind

- $z \in \mathbb{Z}, l \in L, m \in M$
- $\mathbb{Z}_{\pm\infty} := \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $z_1 \sqsubseteq z_2$ gdw. $z_1 = \bot \vee z_2 = \top$
- $\operatorname{conv} \mathbb{R}^2$ die *konvexen Mengen* über $\mathbb{R}^2$ bzw. $\operatorname{conv}(l)$ die *konvexe Hülle* von $l$. Eine Teilmenge $m \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in $m$ selbst vollständig in $m$ liegt. Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(l)$ is die kleinste konvexe Menge $m$, die $l$ enthält.

**Aufgabe 7.3** (Galois-Verbindungen)
Seien $(L, \leq_L)$ und $(M, \leq_M)$ vollständige Verbände. Zeigen Sie:

a) Ist $L' \subseteq L$ und $(\alpha, \gamma)$ eine Galois-Verbindung, so gilt $\alpha(\bigsqcup L') = \bigsqcup \alpha(L')$.

b) Zu jeder vollständig additiven Funktion $\alpha : L \to M$ gibt es eine Funktion $\gamma : M \to L$, so dass $(\alpha, \gamma)$ eine Galois-Verbindung ist.

**Abgabe bis 10.12.2013 um 14h im Kasten neben Raum 34-401.4**