Übungen zur Vorlesung
Bäume, Ordnungen und Anwendungen
Blatt 8

Juniorprof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 17.12.2013 um 14h

**Aufgabe 8.1** (Array-Bound-Analyse)
Angenommen, Sie untersuchen ein Programm, das auf einem Array mit ganzen Zahlen arbeitet. Sie wollen wissen, ob das Programm die Grenzen des Arrays respektiert. Das Programm verwaltet einen Zeiger, über den es auf einzelne Elemente des Arrays zugreifen kann. Der Datenbereich des Programms ist also $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$. Für die Analyse ist nur der Abstand des Zeigers von den Rändern des Arrays von Bedeutung. Ist dieser Abstand negativ, so ist eine Arraygrenze überschritten worden. Weiterhin ist es nur nötig, das Verhalten nahe der Grenze zu untersuchen.

Geben Sie einen endlichen vollständigen Verband $M$ an, der eine Array-Bound-Analyse ermöglicht. Geben Sie außerdem eine Galoisverbindung von $L := \mathbb{P}(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})$ nach $M$ an.
*Hinweis:* Beschreiben Sie Ihre Galoisverbindung möglichst einfach, indem Sie einfachere Verbindungen kombinieren und Extraktionsfunktionen verwenden.

**Aufgabe 8.2** (Galois-Verbindungen)
Betrachten Sie als Datenbereich die Menge $\{0,1\}^k$, also Binärstrings der Länge $k$. Geben Sie eine Extraktionsfunktion an, die diesen Datenbereich nach ganz $\mathbb{Z}$ abbildet. Welchen abstrakten Datenbereich würden Sie benutzen, um Integer-Überläufe zu erkennen?

**Aufgabe 8.3** (Produkte von Galoisverbindungen)
Zeigen Sie:

1. Seien $(L_i, \leq_i)$ vollständige Verbände für $i \in \{1,2,3\}$ und seien $\alpha_i, \gamma_i$ Galoisverbindungen für $i \in \{1,2\}$ mit $\alpha_i : L_i \to L_{i+1}$ und $\gamma_i : L_{i+1} \to L_i$. Dann ist $(\alpha_2 \circ \alpha_1, \gamma_1 \circ \gamma_2)$ eine Galoisverbindung zwischen $(L_1, \leq_1)$ und $(L_3, \leq_3)$.

2. Seien $\alpha_i, \gamma_i$ Galoisverbindungen für $i \in \{1,2\}$ mit $\alpha_i : \mathbb{P}(V_i) \to \mathbb{P}(D_i)$ und $\gamma_i : \mathbb{P}(D_i) \to \mathbb{P}(V_i)$. Dann ist $(\alpha, \gamma)$ eine Galoisverbindung mit
$$\alpha : \mathbb{P}(V_1 \times V_2) \to \mathbb{P}(D_1 \times D_2) \quad \alpha(V') = \bigsqcup\{\alpha_1(\{v_1\}) \times \alpha_2(\{v_2\}) \mid (v_1, v_2) \in V'\}$$
$$\gamma : \mathbb{P}(D_1 \times D_2) \to \mathbb{P}(V_1 \times V_2) \quad \gamma(D) = \{(v_1, v_2) \mid \alpha_1(v_1) \times \alpha_2(v_2) \subseteq D\}.$$

3. Seien $\alpha_i, \gamma_i$ Galoisverbindungen für $i \in \{1,2\}$ mit $\alpha_i : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(D_i)$ und $\gamma_i : \mathbb{P}(D_i) \to \mathbb{P}(V)$. Dann ist $(\alpha, \gamma)$ eine Galoisverbindung mit
$$\alpha : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(D_1 \times D_2) \qquad \alpha(V') = \bigsqcup\{\alpha_1(\{v\}) \times \alpha_2(\{v\}) \mid v \in V'\}$$
$$\gamma : \mathbb{P}(D_1 \times D_2) \to \mathbb{P}(V) \qquad \gamma(D) = \{v \mid \alpha_1(v) \times \alpha_2(v) \subseteq D\}.$$

*Hinweis:* Für 3. brauchen Sie den Beweis aus 2. nicht noch einmal zu führen.

**Abgabe bis 17.12.2013 um 14h im Kasten neben Raum 34-401.4**