2.4 Join-over-all paths

Bisher: · Datenflussanalyse durch Lösung des Gleichungssystems, das von einem Datenflusssystem S induziert wird.
· Ansatz zur Lösung: Fixpunktiteration von g_S.

Problem: · Die Fixpunktiteration ist manchmal unpräzise
· Sie bildet den Join der Datenflussinformation in jedem Berechnungsschritt:

$$X_2^{LFP, iter 2} = f_1(X_1^{LFP, iter 1}) \sqcup f_0(X_0^{LFP, iter 1})$$

· Damit sind die zukünftigen Berechnungen von dieser zwischenzeitlichen Abstraktion betroffen und werden ebenfalls unpräzise (und durch weitere Abstraktionen noch unpräziser).

Idee: Abstrahiere (Join) nur am Ende der Berechnung.

Definition (Join-over-all-paths):
Sei $S = (G, (D, \leq), i, f)$ mit $G = (B, E, F)$ ein Datenflusssystem.
· Für jeden Block $b \in B$ sei

$$paths(b) := \{ \pi = b_1 \dots b_{k-1} \in B^* \mid k \geq 1, b_1 \in E, (b_i, b_{i+1}) \in F \text{ f.a. } 1 \leq i < k, b_k = b \}$$

die Menge der Pfade, die von einem Extremalknoten zu b führen.
· Gegeben ein Pfad $\pi = b_1 \dots b_{k-1} \in paths(b)$, definieren wir die Transferfunktion $f_\pi : D \to D$ mittels

$$f_\pi := f_{b_{k-1}} \circ \dots \circ f_{b_1} \circ id \qquad (\text{also } f_\varepsilon = id)$$

· Die join-over-all-paths (JOP) Lösung von S ist nun definiert als

$$JOP(S) := (X_{b_1}^{JOP}, \dots, X_{b_{|B|}}^{JOP}) \in D^{|B|}$$

mit

$$X_b^{JOP} := \bigsqcup \{ f_\pi(i) \mid \pi \in paths(b) \}.$$

Beispiel (Fixpunktlösung vs. JOP-Lösung):

Betrachte das Programm

$$
\begin{aligned}
c = \ &\text{if } [z>0]^1 \text{ then} \\
&\quad [x:=2]^2; \\
&\quad [y:=3]^3; \\
&\text{else} \\
&\quad [x:=3]^4; \\
&\quad [y:=2]^5; \\
&\text{end;} \\
&[z:=x+y]^6; \\
&[\text{skip}]^7;
\end{aligned}
$$

Führe eine Constant-Propagation-Analyse durch. Sei S das Datenflusssystem.

Die Fixpunktlösung von S lautet:

$$X_1^{LFP} = (\underset{x}{\perp}, \underset{y}{\perp}, \underset{z}{\perp})$$

$$X_2^{LFP} = (\perp, \perp, \perp)$$

$$X_3^{LFP} = (2, \perp, \perp)$$

$$X_4^{LFP} = (\perp, \perp, \perp)$$

$$X_5^{LFP} = (3, \perp, \perp)$$

$$X_6^{LFP} = (2, 3, \perp) \sqcup (3, 2, \perp) = (\top, \top, \perp)$$

$$X_7^{LFP} = (\top, \top, \top).$$

Die JOP-Lösung von S für Block 7 lautet:

$$
\begin{aligned}
X_7^{JOP} &= f_{b_1 b_2 b_3 b_6}(\perp, \perp, \perp) \\
&\sqcup f_{b_1 b_4 b_5 b_6}(\perp, \perp, \perp) \\
&= (2, 3, 5) \sqcup (3, 2, 5) \\
&= (\top, \top, 5).
\end{aligned}
$$

Beachte:
- paths(b) ist typischerweise unendlich
- Es ist daher nicht klar, ob X_b^{JOP} berechnet werden kann.

↳ Tatsächlich ist JOP oft zu gut, um berechenbar zu sein.

Satz (Kam, Ullman 1977)

Die JOP-Lösung für Constant-Propagation ist nicht berechenbar.

Beweis:

Reduktion (einer modifizierten Variante) von Posts Korrespondenzproblem auf die Berechnung der JOP-Lösung.

Eingabe von PCP: Paare $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)$ von Worten über $\{0, \dots, 9\}$

Frage: Gibt es eine Indexfolge $i_1 \dots i_k$ mit $i_1 = 1$, (macht das Problem nicht leichter) so dass $u_{i_1} \dots u_{i_k} = v_{i_1} \dots v_{i_k}$.

· Zur Reduktion sei $|u|$ die Länge des Wortes u und $[\![u]\!]$ die Zahl, die von u dargestellt wird.

· Betrachte folgendes Programm

$x := [\![u_1]\!];$
$y := [\![v_1]\!];$
while (...) **do**
  if (...) **then**
    $x := x \cdot 10^{|u_1|} + [\![u_1]\!];$
    $y := y \cdot 10^{|v_1|} + [\![v_1]\!];$
  else
    ⋮
    if (...) **then**
      $x := x \cdot 10^{|u_n|} + [\![u_n]\!];$
      $y := y \cdot 10^{|v_n|} + [\![v_n]\!];$
    else
      skip;
    endif
    ⋮
  endif
endwhile

$b = [z := \text{sign}((x-y)^2)]^{l};$

1, falls positiv
0, falls 0
−1, falls negativ.

$b' = [\text{skip}]^{l'};$

· Falls PCP eine Lösung hat, dann gibt es einen Pfad, der an Block b $x = y$ und damit bei b' $z = 0$ liefert.

· Ansonsten ist z konstant 1 bei b'.

↳ Es gilt also $X_{b'}^{JOP} = 1$ gdw. PCP hat keine Lösung.

↳ Da PCP nicht entscheidbar ist, ist JOP(S) im Allgemeinen nicht berechenbar. □

Allerdings ist X_b^{LFP} immer eine sichere Approximation von X_b^{JOP}.

Satz (Zusammenhang zwischen LFP und JOP):

Sei $S = (G, (D, \leq), i, f)$ ein Datenflusssystem mit $G = (B, E, F)$.

Sei $lfp(g_S) = (X_{b_1}^{LFP}, \ldots, X_{b_{|B|}}^{LFP})$ die Fixpunktlösung des assoziierten Gleichungssystems und sei

$$JOP(S) = (X_{b_1}^{JOP}, \ldots, X_{b_{|B|}}^{JOP})$$

die JOP-Lösung.

(a) Für alle $b \in B$ gilt

$$X_b^{JOP} \leq X_b^{LFP}.$$

(b) Falls alle Transferfunktionen distributiv sind (siehe distributive Frameworks), gilt sogar

$$X_b^{JOP} = X_b^{LFP} \quad \text{f.a. } b \in B.$$

Beweis:

Zu (a): Definiere

$$X_b^{JOP,n} := \bigsqcup \{ f_\pi(i) \mid \pi \in paths(b) \text{ mit } |\pi| \leq n \}.$$

Dann gilt:

$$X_b^{JOP} = \bigsqcup \{ X_b^{JOP,n} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Zeige nun:

$$X_b^{JOP,n} \leq X_b^{LFP} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt

$$\bigsqcup \{ X_b^{JOP,n} \mid n \in \mathbb{N} \} \leq X_b^{LFP}.$$

Induktion nach n:

IA: Falls es Pfade der Länge 0 gibt, gilt $b \in E$ und so

$$f_\varepsilon(i) = id(i) = i = X_b^{LFP}.$$

IS: Angenommen die Behauptung gilt für $X_b^{JOP,n}$.

Dann gilt für

$$X_b^{LFP}$$

$$= \bigsqcup \{ f_{b'}(X_{b'}^{LFP}) \mid (b', b) \in F \}$$

$$(\text{IV} + \text{Monotonie}) \geq \bigsqcup \{ f_{b'}(X_{b'}^{JOP_n}) \mid (b', b) \in F \}$$

$$(\text{Def. JOP}) = \bigsqcup \{ f_{b'}(\bigsqcup \{ f_\pi(i) \mid |\pi| \leq n,\ \pi \in paths(b') \}) \mid (b', b) \in F \}$$

$$\left(\begin{array}{c} f(a) \sqcup f(b) \\ \leq f(a \sqcup b) \end{array}\right) \geq \bigsqcup \{ \bigsqcup \{ f_{b'}(f_\pi(i)) \mid |\pi| \leq n,\ \pi \in paths(b') \} \mid (b', b) \in F \}$$

$$= \bigsqcup \{ f_{\pi'}(i) \mid |\pi'| \leq n+1,\ \pi' \in paths(b) \}.$$