$\boxed{5.1a}$

Vor. $\models \{A\}\, c\, \{B\}$

Beh. $\models \{\exists v.\, A\}\, c\, \{\exists v.\, B\}$ falls $v \notin fv(c)$

Beweis:

Sei $\sigma, \sigma' \in State$ bel. mit $\sigma = (s,h)$ und $\sigma' = (s',h')$ und:

$$\sigma \models \exists v.\, A \quad \text{und} \quad (c,\sigma) \Downarrow \sigma'.$$

z.z.: $\sigma' \models \exists v.\, B$

Nach Def gilt: $[\![\exists v.\, A]\!]\, s\, h = \exists a \in \mathbb{Z}.\ [\![A]\!]\, s[v \mapsto a]\, h$

Nach Ann ex. ein solches $a \in \mathbb{Z}$ mit $1 = [\![A]\!]\, \tilde{s}\, h$, $\tilde{s} = s[v \mapsto a]$, tatsächlich.

Ferner gilt:

$$(c, (\tilde{s}, h)) \Downarrow (\tilde{s}', h') \quad \text{mit} \quad \tilde{s}' = s'[v \mapsto a].$$

da $v \in fv(c)$. // v wird in c nicht verwendet

Dann liefert Vor.:

$$(\tilde{s}', h') \models B$$

Genauer $1 = [\![B]\!]\, \tilde{s}', h' = [\![B]\!]\, s'[v \mapsto a]\, h'$

Dann folgt nach Def: $[\![\exists v.\, B]\!]\, s'\, h' = 1$

$\square$

$\boxed{5.1a}$

<u>Vor.</u> $\models \{A\}\, c\, \{B\}$

<u>Beh.</u> $\models (\{A\}\, c\, \{B\})[x/E]$ falls $x \in fv(\{A\}\, c\, \{B\}) \setminus mut(c)$
und $fv(E) \cap mut(c) = \emptyset$.

<u>Beweis:</u>

Sei $\sigma, \sigma' \in State$ bel. mit • $\sigma \models A[x/E]$ und
• $(c[x/E], \sigma) \Downarrow \sigma'$.

Sei $\sigma = (s,h)$ und $\sigma' = (s', h')$.

Das Substitutionslemma aus der VL liefert: $\underbrace{s[x \mapsto [\![E]\!]s]}_{\tilde{s}}, h \models A$.

Ferner gilt:

$$(c, (\tilde{s}, h)) \Downarrow (\tilde{s}', h')$$

mit $\tilde{s}' = s'[x \mapsto [\![E]\!]s] = s'[x \mapsto [\![E]\!]s']$

da $x \notin \overset{mut}{\cancel{fv}}(c)$ und $fv(E) \cap fv(c) = \emptyset$.

// jedes Vorkommen von x ist als evaluierter Ausdruck ⤳ verwende E stattdessen

Nun liefer Vor.: $\tilde{s}, h' \models B$

Genauer: $1 = [\![B]\!]\, \tilde{s}, h' = [\![B[x/E]]\!]\, s' h'$

↑ Substitutionslemma

□

$\boxed{5.2}$

a) Seien A, B pure. Seien s, h bel.

$$\llbracket A * B \rrbracket sh = \exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \rrbracket sh_1 \wedge \llbracket B \rrbracket sh_2$$

$$\overset{A,B \text{ pure}}{=} \exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \rrbracket sh \wedge \llbracket B \rrbracket sh$$

$$= \llbracket A \rrbracket sh \wedge \llbracket B \rrbracket sh = \llbracket A \wedge B \rrbracket sh$$

b) Sei~~en~~ ~~A,~~B pure. Seien s, h bel.

$$\llbracket (A \wedge B) * C \rrbracket sh = \exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \wedge B \rrbracket sh_1 \wedge \llbracket C \rrbracket sh_2$$

$$= \exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \rrbracket sh_1 \wedge \llbracket B \rrbracket sh_1 \wedge \llbracket C \rrbracket sh_2$$

$$\overset{B \text{ pure}}{=} \left(\exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \rrbracket sh_1 \wedge \llbracket C \rrbracket sh_2\right) \wedge \llbracket B \rrbracket sh$$

$$= \llbracket A * C \rrbracket sh \wedge \llbracket B \rrbracket sh = \llbracket (A * C) \wedge B \rrbracket sh$$

c) Sei A int. Seien s, h bel.

$$\llbracket A * B \to A \rrbracket sh = \llbracket A * B \rrbracket sh \to \llbracket A \rrbracket sh$$

$$= (\exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \rrbracket sh_1 \wedge \llbracket B \rrbracket sh_2) \to \llbracket A \rrbracket sh$$

$$\geq (\exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket A \rrbracket sh \wedge \llbracket B \rrbracket sh_2) \to \llbracket A \rrbracket sh$$

$$= (\llbracket A \rrbracket sh \wedge (\exists h_1, h_2. \dots)) \to \llbracket A \rrbracket sh$$

$$= 1$$

5.2

d) Sei A int. Seien s, h, h' bel. mit $h \subseteq h'$. Sei $h' = \tilde{h} \uplus h$.

- Gelte $[\![A * B]\!] s h = 1$. zz: $[\![A * B]\!] s h' = 1$.

$$[\![A * B]\!] s h = \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!] s h_1 \wedge [\![B]\!] s h_2$$

$$\Rightarrow \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!] s (h_1 \uplus \tilde{h}) \wedge [\![B]\!] s h_2$$

$$\Rightarrow \exists h_1, h_2 .\ h' = \underbrace{(h_1 \uplus \tilde{h})}_{\checkmark} \uplus h_2 \wedge [\![A]\!] s (h_1 \uplus \tilde{h}) \wedge [\![B]\!] s h_2$$

$$= [\![A * B]\!]_s h'$$

- Gelte $[\![A -\!\!* B]\!] s h$. zz: $[\![A -\!\!* B]\!] s h'$.

Sei h_1 bel. mit $h_1 \perp h'$ und $[\![A]\!] s h_1$.

Da A int, gilt $[\![A]\!] s (h_1 \uplus \tilde{h})$. Ferner $h_1 \uplus \tilde{h} \perp h$.

Somit liefert Vor: $[\![B]\!]_s\, h \uplus h_1 \uplus \tilde{h}$

also $[\![B]\!]_s (h' \uplus h_1)$

- Gelte $[\![B -\!\!* A]\!] s h$. zz: $[\![B -\!\!* A]\!] s h'$.

Sei h_1 bel. mit $h_1 \perp h'$ und $[\![B]\!] s h_1$.

Es gilt: $h_1 \perp h$.

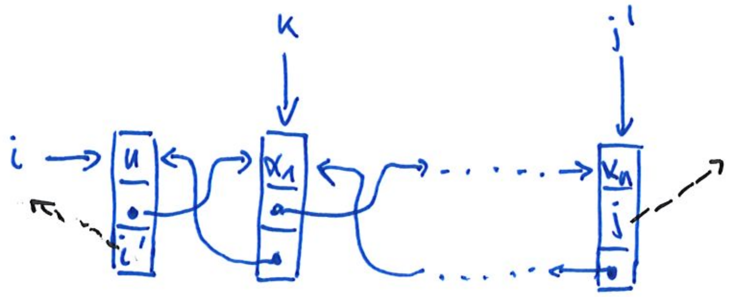
Nach Vor: $[\![A]\!]_s h$.

Da ~~B~~ A int: $[\![A]\!] s h'$.

$\square$

$\boxed{5.3a}$

- $dl_{u.\alpha}(i, i', j, j')$:



$\Sigma = \{ \varepsilon/_0, u/_0, \cdot/_2 \}$

$dl_\varepsilon(i, i', j, j') = emp \wedge i = j \wedge i' = j'$

$dl_{u.\alpha}(i, i', j, j') = \exists k.\ i \mapsto u, k, i' * dl_\alpha(k, i, j, j')$

- $dlseg_\alpha(i, j) = dl_\alpha(i, nil, nil, j)$

$\boxed{5.3b}$

$$\mathrm{bstree}_{l,r}(i) = (\mathrm{emp} \wedge i = \mathrm{nil})$$
$$\vee\ \exists a,b,c.\ i \mapsto c,a,b\ \boxed{* \ \mathrm{bstree}_{l,c-1}(a) \ * \ \mathrm{bstree}_{c+1,r}(b)}$$

benötigt Verallgemeinerung auf Noetherschen Vorgänger, statt syntaktisch enthaltenes Element

---

$$\Sigma = \{ \varepsilon/0,\ u/0,\ T/3 \}$$

$$\mathrm{bst}_\varepsilon(i) = \mathrm{emp} \wedge i = \mathrm{nil}$$

$$\mathrm{bst}_{T(u,l,r)}(i) = \exists a,b.\ i \mapsto u,a,b * \mathrm{bst}_l(a) * \mathrm{bst}_r(b)$$

$$\mathrm{bstree}_{l,r}(i) = \bigvee_{\underline{T \in \mathrm{Tree}(l,r)}_{\text{endlich}}} \mathrm{bst}_T(i)$$

Tree(l,r) ist kleinste Term Menge mit:

- $\varepsilon \in \mathrm{Tree}(l,r)$
- $\{u \mid l \leq u \leq r\} \subseteq \mathrm{Tree}(l,r)$
- $\left\{ T(u,a,b) \;\middle|\; \begin{array}{l} l \leq u \leq r \\ a \in \mathrm{Tree}(l,u-1) \\ b \in \mathrm{Tree}(u+1,r) \end{array} \right\} \subseteq \mathrm{Tree}(l,r)$

$\boxed{5.4}$

(GMUTR) $\{a_1 \mapsto - * (a_1 \mapsto a_2 -\!\!* B)\}\ [a_1] := a_2\ \{B\}$

(GMUTV) $\{a_1 \mapsto - * C\}\ [a_1] := a_2\ \{a_1 \mapsto a_2 * C\}$

a) Wähle $B \equiv a_1 \mapsto a_2 * C$

Dann gilt (GMUTR):

$$\{a_1 \mapsto - * (a_1 \mapsto a_2 -\!\!* (a_1 \mapsto a_2 * C))\}$$
$$[a_1] := a_2$$
$$\{a_1 \mapsto a_2 * C\}$$

Wende (CONS) an, um Pre-Annotation zu ändern.

Dazu zeige

$$[a_1 \mapsto - * C] \to [a_1 \mapsto - * (a_1 \mapsto a_2 -\!\!* (a_1 \mapsto a_2 * C))]$$

valide ist.

Seien s,h bel mit $[\![a_1 \mapsto - * C]\!]\, s\, h = 1$.

Dann ex. h_1, h_2 mit $h = h_1 \uplus h_2$, $[\![a_1 \mapsto -]\!]\, s\, h_1$, $[\![C]\!]\, s\, h_2$

z.z.: $[\![a_1 \mapsto a_2 -\!\!* (a_1 \mapsto a_2 * C)]\!]\, s\, h_2 = 1$

Sei $\tilde{h}$ bel mit $\tilde{h} \perp h_2$ und $[\![a_1 \mapsto a_2]\!]\, s\, \tilde{h}$

Dann folgt sofort $[\![a_1 \mapsto a_2 * C]\!]\, s\, \tilde{h} \uplus h_2$, da

$$[\![C]\!]\, s\, h_2 \quad \text{und} \quad [\![a_1 \mapsto a_2]\!]\, s\, \tilde{h}.$$

b) Wähle $C \equiv a_1 \mapsto a_2 -\!\!* B$. Dann gilt (GMUTV):

$\{a_1 \mapsto - * (a_1 \mapsto a_2 -\!\!* B)\}\ [a_1] := a_2\ \{a_1 \mapsto a_2 * (a_1 \mapsto a_2 -\!\!* B)\}$

Wende (CONS) an, um (GMUTR) zu erhalten. Dazu zeige:

$[a_1 \mapsto a_2 * (a_1 \mapsto a_2 -\!\!* B)] \to B$ valid. VMP $\square$