Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 4 (Präsenz)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 11. Mai　　Bearbeitung: 12./13. Mai

Aufgabe 1: Kompaktheitssatz

Im Beweis des Kompaktheitssatzes haben wir benutzt, dass es eine Abzählung aller Formeln gibt.

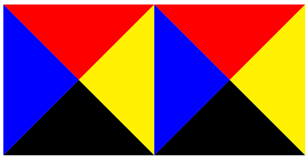
a) Erinnern Sie sich an die Definition von **Abzählbarkeit** und **Aufzählbarkeit**. Welche Eigenschaft ist stärker?

b) Zeigen Sie, dass die Menge der aussagenlogischen Formeln aufzählbar ist. Nehmen Sie hierfür an, dass die Menge der Aussagenvariablen von der Form $V = \{p_1, p_2, p_3 \ldots\}$ ist.

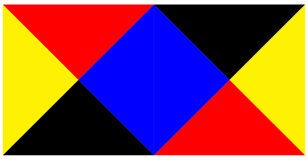
Aufgabe 2: Kachelung der Ebene

Nehmen Sie an, Sie wollen die Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kacheln, das heißt Sie wollen jedem 1×1 Einheitsquadrat eine Kachel zuordnen.

Sie haben dazu eine endliche Menge an **Kacheltypen** gegeben, von denen jeder angibt, welche der vier Seiten einer Kachel welche Farbe trägt. Sie möchten die Ebene dabei so kacheln, dass angrenzende Farben übereinstimmen.



ungültiger Ausschnitt



gültiger Ausschnitt

Zeigen Sie: Es gibt eine Kachelung der ganzen Ebene genau dann, wenn es für jeden endlichen Ausschnitt eine Kachelung gibt.

Bitte wenden!

Hinweise:
Sie dürfen für die Bearbeitung des Aufgabenblatts die folgenden Lemmata verwenden, die in der Vorlesung bewiesen wurden bzw. in den handschriftlichen Notizen zu finden sind.

Für alle $A, B, C \in F_0 = F(\{\neg, \to\})$ gelten:

$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to (B \to A)$	(Axiomenschema 1)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$	(Axiomenschema 2)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	(Axiomenschema 3)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \to A$	(Beispiel 2.10)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to A$	(Lemma 0)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$	(Lemma 1)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B \to (B \to A)$	(Lemma 2)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to \neg\neg A$	(Lemma 3)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	(Lemma 4)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to \big(\neg B \to \neg(A \to B)\big)$	(Lemma 5)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to \big((A \to \neg B) \to \neg A\big)$	(Lemma 6)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \to A) \to \big((\neg B \to A) \to A\big)$	(Lemma 7)

Aufgabe 3: Inkonsistenzregel
Zeigen Sie, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann gilt, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ in $\mathcal{F}_0$ inkonsistent ist. Sie können das Deduktionstheorem und die oben angegebenen Lemmata verwenden.

Aufgabe 4: Beweise im Kalkül $\mathcal{F}_0$
Zeigen Sie:

a) $\neg(p \to q) \vdash_{\mathcal{F}_0} q \to p$

b) $r \to \neg(p \to p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

c) $p \to (q \to r) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r \to (q \to \neg p)$

d) $\vdash_{\mathcal{F}_0} p \to \big(\neg q \to \neg(p \to q)\big)$

Sie können die oben angegebenen Lemmata, die Inkonsistenzregel (Aufgabe 3) und das Deduktionstheorem verwenden, **nicht jedoch** die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$. Die Inkonsistenzregel soll dabei in mindestens einer Teilaufgabe verwendet und in mindestens einer Teilaufgabe vermieden werden.