Ausgabe: 18. Mai — Abgabe: 27. Mai

Werfen Sie Ihre Lösung bis Freitag, 27. Mai, um **12:00** in die Abgabekästen im 4. Stock von Gebäude 34. Geben Sie **zu dritt** ab.

Hinweise:
Sie dürfen für die Bearbeitung des Aufgabenblatts die folgenden Lemmata verwenden, die in der Vorlesung bewiesen wurden bzw. in den handschriftlichen Notizen zu finden sind.

Für alle $A, B, C \in F_0 = F\left(\{\neg, \rightarrow\}\right)$, $\Sigma \subseteq F_0$ gelten:

$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(Axiomenschema 1)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$	(Axiomenschema 2)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	(Axiomenschema 3)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \rightarrow A$	(Beispiel 2.10)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow A$	(Lemma 0)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow \big((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$	(Lemma 1)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$	(Lemma 2)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow \neg\neg A$	(Lemma 3)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	(Lemma 4)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow \big(\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)\big)$	(Lemma 5)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow \big((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A\big)$	(Lemma 6)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \rightarrow A) \rightarrow \big((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A\big)$	(Lemma 7)
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \rightarrow A)$ gdw. $B \vdash_{\mathcal{F}_0} A$	(Deduktionstheorem)
$\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ in $\mathcal{F}_0$ inkonsistent	(Inkonsistenzregel)

Aufgabe 1: Mehr Beweise im Kalkül $\mathcal{F}_0$
Zeigen Sie:

a) $\neg(q \rightarrow p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$

b) $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(p \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

c) $q,\ r \rightarrow \neg q \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

d) $p \rightarrow (\neg q \rightarrow r),\ (\neg q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg q),\ \neg r \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$

Verwenden Sie hierzu **nicht** die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2: Vollständigkeit in Kalkülen

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass der Kalkül $\mathcal{F}_0$ **vollständig** ist, dass sich also jede Tautologie in $\mathcal{F}_0$ ableiten lässt. In dieser Aufgabe lernen Sie einen Kalkül kennen, der nicht vollständig ist.

Gegeben sei der Kalkül $\mathcal{K} = (Ax, R)$, wobei R nur Modus Ponens enthält und Ax durch nur ein Axiomenschema gegeben ist, nämlich $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion dass für jeden Beweis $B_1, \ldots, B_n$ und für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: jede atomare Aussage p kommt in B_i gerade oft vor.

b) Schließen Sie daraus, dass im Kalkül $\mathcal{K}$ nicht jede Tautologie herleitbar ist (selbst wenn in ihr nur $\neg$ und $\to$ als Junktoren auftreten).

Aufgabe 3: Gentzen-Sequentzkalkül

Zeigen Sie die folgenden Aussagen im Gentzen-Sequentzkalkül. Notieren Sie die Beweise wie in der Vorlesung bottom-up und baumartig. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel angewandt wurde.

a) $\neg(p \to q) \vdash_G q \to p$

b) $\vdash_G (p \wedge q) \to (p \vee r)$

c) $s \wedge r,\ r \to \neg(p \wedge q) \vdash_G \neg p, \neg q$

(Siehe auch entsprechendes Beispiel in den Aufzeichnungen.)

Aufgabe 4: Tableaux

a) Beweisen Sie das Lemma von Hintikka:
Eine vollständige Menge Θ ist genau dann erfüllbar, wenn sie offen ist.

Hinweis: Die Vorlesungsfolien enthalten eine Beschreibung des Beweisansatzes. Unterscheiden Sie im Induktionsbeweis zwischen α- und β-Formeln. Welche Basisfälle muss man betrachten?

b) Zeigen Sie unter Verwendung eines Tableaus, dass
$\big((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)\big)$ eine Tautologie ist.

c) Zeigen Sie durch Angabe eines abgeschlossenen Tableaus, dass
$\big(p \to (q \wedge r)\big) \wedge \big((r \to \neg q) \wedge p\big)$ unerfüllbar ist.

d) Zeigen Sie durch Angabe eines abgeschlossenen Tableaus, dass
$\big(p \to (q \to r)\big) \wedge \neg \big((p \to q) \to (p \to r)\big)$ unerfüllbar ist.