Ausgabe: 08. Juni | Bearbeitung: 09./10. Juni

Aufgabe 1: Bereinigte Pränexnormalform

Beweisen Sie Satz 4.25 aus der Vorlesung:
Zu jeder Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ gibt es eine logisch äquivalente Formel $B \in \mathrm{FO}(S)$ in bereinigter Pränexnormalform (BPF).

Wie lässt sich der Beweis nutzen, um einen rekursiven Algorithmus zum Transformieren in BPF zu konstruieren?

Aufgabe 2: Skolemform

a) Berechnen Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung zu der Formel

$$\big(\forall x \exists y \colon p(x, f(y))\big) \wedge \big(\neg \exists y \forall x \exists z \colon \big[q(g(z), f(x)) \vee p(y, z)\big]\big)$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einer Formel $A \in \mathrm{FO}(S)$ eine erfüllbarkeitsäquivalente abgeschlossene Formel in Skolemform berechnet.

c) Zeigen Sie, dass die Skolemisierung eine Formel liefern kann, die nicht äquivalent zur Eingabeformel ist.

Betrachten Sie hierfür die Formel $A \equiv \forall x \exists y \colon p(x, y) \in \mathrm{FO}(S)$ und ihre Skolemisierung $B \in \mathrm{FO}(S')$. Beachten Sie, dass man A auch als Formel über Signatur $S' = S \uplus \mathrm{Sko}$ auffassen kann.

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- $A \models B$
- $B \models A$

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Tautologien

Nehmen Sie an, die prädikatenlogische Formel $A' \in \mathrm{FO}(S)$ entsteht aus einer aussagenlogischen Formel A, indem jede Aussagenvariable durch eine prädikatenlogische Formel ersetzt wird. Hierbei sollen Vorkommen der gleichen Variablen auch durch die gleiche Formel ersetzt werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} A &\equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \\ A' &\equiv (r(a,b) \wedge s(c)) \rightarrow (r(a,b) \vee s(c)) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:
Wenn A eine aussagenlogische Tautologie ist, dann ist A' eine prädikatenlogische Tautologie.

Gilt die Rückrichtung?

Aufgabe 4: Mächtigkeit von Datenbereichen

Für eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ schreiben wir $|\mathcal{M}|$ für $|D|$, die Mächtigkeit von D. Wir nennen $\mathcal{M}$ **endlich**, falls die Menge D endlich ist.

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ abgeschlossene Formel A_n an, für die gilt:
$\mathcal{M} \models A_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| = n$.

b) Es sei B eine abgeschlossene Formel, in der „=“ nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell $\mathcal{M}$ für B ein Modell $\mathcal{M}'$ für B konstruiert werden, so dass $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}| + 1$?

   Dass $\mathcal{M}'$ Modell für B ist, muss hier nicht unbedingt bewiesen werden.

c) Schließen Sie aus b), dass es für kein $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ eine Formel gibt, die ohne „=“ auskommt und äquivalent zur Formel A_n aus a) ist.