Prof. Dr. Roland Meyer
Sebastian Muskalla

Logik
Aufgabenblatt 11 (Abgabe)

TU Kaiserslautern
Sommersemester 2016

Ausgabe: 29. Juni — Bearbeitung: 7./8. Juli

Aufgabe 1: Unentscheidbarkeit & Semi-Entscheidbarkeit

Informieren Sie sich gegebenenfalls zunächst über **kontextfreie Grammatiken** und die von ihnen erzeugten **Sprachen**. Eine kontextfreie Grammatik heißt **linear**, wenn auf der rechten Seite jeder Regel höchstens ein Nichtterminal vorkommt. Ein Beispiel für eine solche Grammatik ist

$$S \to 0S0, \qquad S \to 1S1, \qquad S \to 0, \qquad S \to 1, \qquad S \to \varepsilon,$$

wobei ε das leere Wort bezeichnet. Die von der Beispielgrammatik erzeugte Sprache ist die Menge aller Palindrome über $\{1,0\}$, also Wörter $w \in \{1,0\}^*$, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind, $w = w^{\text{rev}}$.

a) Geben Sie eine lineare kontextfreie Grammatik an, die die Menge aller Palindrome der folgenden Form erzeugt:
$$\left\{w\#w^{\text{rev}} \;\middle|\; w \in \{0,1\}^*, w \neq \varepsilon\right\} \subseteq \{0,1,\#\}^* .$$
Beachten Sie, dass w nicht das leere Wort sein darf.

b) Sei eine PCP Instanz $I = (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ gegeben.

Geben Sie eine lineare kontextfreie Grammatik an, die die Wörter der folgenden Form erzeugt.
$$\left\{x_{i_1} \dots x_{i_k} \# y_{i_k}^{\text{rev}} \dots y_{i_1}^{\text{rev}} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}, k > 0, i_j \in \{1,\dots,n\} \text{ für alle } j \in \{1,\dots,k\}\right\}$$

c) Zeigen Sie unter Verwendung der vorhergehenden Aufgabenteile, dass das folgende Problem unentscheidbar ist, indem Sie das PCP auf dieses Problem reduzieren:

Gegeben: Lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
Frage: Gilt $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) \neq \varnothing$?

d) Geben Sie einen Semi-Entscheidsverfahren für das Problem aus Aufgabenteil c) an.

Sie dürfen dabei verwenden, dass das folgende Problem entscheidbar ist:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort w.
Frage: Gilt $w \in \mathcal{L}(G)$?

Bitte umdrehen!

Aufgabe 2: Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik

Es sei A eine prädikatenlogische Formel, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}_n$ besitzt mit $|\mathcal{M}_n| \geq n$. (Gemeint ist, dass der Datenbereich von $\mathcal{M}$ mindestens n Elemente hat.)

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel B_n an, so dass für jede Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models B_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| \geq n$.

b) Betrachten Sie die Menge $\Sigma = \{A \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes, dass Σ erfüllbar ist.

c) Zeigen Sie, dass A ein unendliches Modell besitzt, d.h. eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit $\mathcal{M} \models A$, wobei D unendlich ist.

Hinweis: Betrachten Sie ein Modell für Σ.

d) Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, so dass $\mathcal{M} \models E$ genau dann, wenn der Datenbereich von $\mathcal{M}$ endlich ist.

Aufgabe 3: Logische Folgerung

a) Es sei B eine Formel, in der die Variable x nicht frei vorkommt. Zeigen Sie mittels Satz 5.4 und Bemerkung 5.2 in den Folien, dass

$$\models A \rightarrow B \quad \text{gdw.} \quad \models (\exists x : A) \rightarrow B\,.$$

b) Im Generalisierungstheorem (in Satz 5.4) wird vorausgesetzt, dass x in keiner Formel von Γ frei vorkommt. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass diese Voraussetzung nicht fallengelassen werden kann.

Mit anderen Worten: Geben Sie eine Formelmenge Γ und eine Formel A an, für die eine der Aussagen $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models \forall x\colon A$ gilt, die andere aber nicht.

Es geht noch weiter...

Aufgabe 4: Nichtstandardmodelle

In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man die Existenz eines Nichstandardmodels für die Arithmetik der natürlichen Zahlen beweisen kann. In dieser Aufgaben konstruieren wir analog ein Nichtstandardmodell für die Arithmetik der rationalen Zahlen.

Es sei $S = (Fun, Pred)$ die Signatur mit Funktionssymbolen $F = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, *_{/2}\}$ und Prädikatssymbolen $P = \{<_{/2}\}$. Außerdem sei $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, I)$ die S-Struktur, in der der Datenbereich aus den rationalen Zahlen besteht und die Symbole 0, 1, +, $*$ und $<$ wie üblich interpretiert sind, d.h. $0^{\mathcal{Q}} = 0 \in \mathbb{Q}$, $1^{\mathcal{Q}} = 1 \in \mathbb{Q}$, $d +^{\mathcal{Q}} e = d + e \in \mathbb{Q}$, $d *^{\mathcal{Q}} e = d * e \in \mathbb{Q}$ und $d <^{\mathcal{Q}} e = 1$ gdw. $d < e$ in $\mathbb{Q}$.

Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ die Menge aller abgeschlossenen Formeln über S, für die $\mathcal{Q}$ ein Modell ist:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} = \left\{ A \in \mathrm{FO}_{abg}(S) \;\middle|\; \mathcal{Q} \models A \right\}.$$

a) Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Sigma = \mathcal{T}_{\mathcal{Q}} \cup \left\{ (0 < x) \wedge \left(\underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{n \text{ Mal}} * x < 1 \right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei x eine freie Variable ist. Zeigen Sie, dass Σ erfüllbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

b) Zwei Strukturen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ über der selben Signatur heißen **elementar äquivalent**, wenn sie die gleichen abgeschlossenen Formeln wahr machen:
Für alle $A \in \mathrm{FO}_{abg}(S)$ gilt: $\mathcal{M} \models A$ gdw. $\mathcal{M}' \models A$.

Zeigen Sie, dass jede Struktur M, die Σ aus Aufgabenteil a) erfüllt, elementar äquivalent zu $\mathcal{Q}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine Belegung $\sigma : V \to \mathbb{Q}$ gibt, so dass $\mathcal{Q}, \sigma \models \Sigma$ gilt.

Hinweis: Aufgabenteil a) zeigt, dass Σ ein Modell $\mathcal{M}$ hat, und mit Aufgabenteil b) sind $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{M}$ elementar äquivalent. Aufgabenteil c) zeigt im Wesentlichen, dass $\mathcal{Q}$ nicht **isomorph** zu $\mathcal{M}$ ist. Daher nennen wir $\mathcal{M}$ **Nichtstandardmodel**.