

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 2. Mai 2012 12:00 Uhr

Aufgabe 1.1 [Strukturelle Induktion]

Die *Tiefe* $t(A)$ einer aussagenlogischen Formel A ist wie folgt definiert.

- Ist A eine atomare Formel, so ist $t(A) = 0$.
- Ist $A \equiv (B * C)$ für einen binären Junktor $*$, so gilt

$$t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1.$$

- Ist $A \equiv \neg(B)$, so definieren wir $t(A) = t(B) + 1$.

Außerdem sei $|A|$ die Länge der Formel A , d.h. die Anzahl der Zeichen in A .

Beweisen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel A

- a) die Anzahl der öffnenden Klammern mit der Anzahl der schließenden Klammern übereinstimmt.
- b) $|A| \leq 5k + 1$, wobei k die Anzahl der Junktorenvorkommen in A ist.
- c) $|A| \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Aufgabe 1.2 [Semantik von Formeln]

- a) Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie

$$\varphi((r \vee (\neg(p \wedge q))))$$

schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

- b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$ eine Tautologie ist.
- c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p \rightarrow q \models q \rightarrow p$.
- d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p \vee q \models \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Aufgabe 1.3 [Deduktionstheorem]

- a) Seien A_1, \dots, A_n, B aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B$, wenn $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots (A_{n-1} \rightarrow A_n) \dots))) \models B$.
- b) Sei Σ eine Menge aussagenlogischer Formeln und B eine aussagenlogische Formel. Zeigen Sie, dass $\Sigma \models B$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg B\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 1.4 [Pfade in Wurzelbäumen]

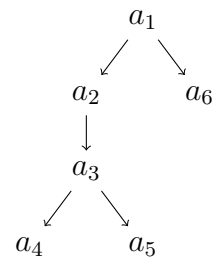
Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, in dem ein Knoten als *Wurzel* ausgewählt ist und die Kanten so gerichtet sind, dass ihr Ursprungsknoten näher an der Wurzel liegt als ihr Zielknoten. Ein *Wurzelpfad* ist ein Pfad, der in der Wurzel beginnt. Für jeden Wurzelpfad P sei \hat{P} die Menge der Knoten, die er trifft. Eine Teilmenge der Knoten heißt *Wurzelpfadmenge*, falls sie von der Form \hat{P} ist für einen Wurzelpfad P .

Seien $V = \{a_1, \dots, a_n\}$ die Knoten eines Wurzelbaums und p_1, \dots, p_n Aussagensymbole. Die Teilmengen von V und die Bewertungen auf p_1, \dots, p_n stehen in Bijektion, wobei die Teilmenge $S \subseteq V$ mit der Belegung φ korrespondiert, für die

$$\varphi(p_i) = 1 \text{ genau dann, wenn } a_i \in S$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

- a) Geben Sie für den nebenstehenden Wurzelbaum eine Formel A an, für die gilt: $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn φ zu einer Wurzelpfadmenge korrespondiert.
- b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das aus einem Wurzelbaum T eine Formel A konstruiert, so dass $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn φ zu einer Wurzelpfadmenge von T korrespondiert.



Abgabe: bis 2. Mai 2012 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4