SS 2012 18. April 2012

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 1

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 2. Mai 2012 12:00 Uhr

**Aufgabe 1.1** [Strukturelle Induktion]

Die *Tiefe* $t(A)$ einer aussagenlogischen Formel $A$ ist wie folgt definiert.

- Ist $A$ eine atomare Formel, so ist $t(A) = 0$.
- Ist $A \equiv (B * C)$ für einen binären Junktor $*$, so gilt

$$t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1.$$

- Ist $A \equiv \neg(B)$, so definieren wir $t(A) = t(B) + 1$.

Außerdem sei $|A|$ die Länge der Formel $A$, d.h. die Anzahl der Zeichen in $A$.

Beweisen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel $A$

a) die Anzahl der öffnenden Klammern mit der Anzahl der schließenden Klammern übereinstimmt.

b) $|A| \leqslant 5k + 1$, wobei $k$ die Anzahl der Junktorenvorkommen in $A$ ist.

c) $|A| \leqslant 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

**Aufgabe 1.2** [Semantik von Formeln]

a) Sei $\varphi$ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie

$$\varphi((r \vee (\neg(p \wedge q))))$$

schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p \to (q \to (p \vee r))$ eine Tautologie ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p \to q \vDash q \to p$.

d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p \vee q \models\!\!\!\!=\!\!\!\!\mid \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

**Aufgabe 1.3** [Deduktionstheorem]

a) Seien $A_1, \ldots, A_n, B$ aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \vDash B$, wenn $(A_1 \to (A_2 \to (\cdots (A_{n-1} \to A_n) \cdots) \vDash B$.

b) Sei $\Sigma$ eine Menge aussagenlogischer Formeln und $B$ eine aussagenlogische Formel. Zeigen Sie, dass $\Sigma \vDash B$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg B\}$ unerfüllbar ist.

**Aufgabe 1.4** [Pfade in Wurzelbäumen]

Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, in dem ein Knoten als *Wurzel* ausgewählt ist und die Kanten so gerichtet sind, dass ihr Ursprungsknoten näher an der Wurzel liegt als ihr Zielknoten. Ein *Wurzelpfad* ist ein Pfad, der in der Wurzel beginnt. Für jeden Wurzelpfad $P$ sei $\hat{P}$ die Menge der Knoten, die er trifft. Eine Teilmenge der Knoten heißt *Wurzelpfadmenge*, falls sie von der Form $\hat{P}$ ist für einen Wurzelpfad $P$.

Seien $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ die Knoten eines Wurzelbaums und $p_1, \ldots, p_n$ Aussagensymbole. Die Teilmengen von $V$ und die Bewertungen auf $p_1, \ldots, p_n$ stehen in Bijektion, wobei die Teilmenge $S \subseteq V$ mit der Belegung $\varphi$ korrespondiert, für die

$$\varphi(p_i) = 1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad a_i \in S$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

a) Geben Sie für den nebenstehenden Wurzelbaum eine Formel $A$ an, für die gilt: $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn $\varphi$ zu einer Wurzelpfadmenge korrespondiert.

$$\begin{tikzcd}
 & & a_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & a_2 \arrow[d] & & a_6 \\
 & a_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
a_4 & & a_5 &
\end{tikzcd}$$

b) Geben Sie ein allgemeins Verfahren an, das aus einem Wurzelbaum $T$ eine Formel $A$ konstruiert, so dass $\varphi(A) = 1$ genau dann, wenn $\varphi$ zu einer Wurzelpfadmenge von $T$ korrespondiert.

**Abgabe: bis 2. Mai 2012 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**