Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 15. Mai 2012 12:00 Uhr

Aufgabe 2.1 [Rekursive Entscheidbarkeit]

Eine Menge M heißt *rekursiv entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe von w nach endlicher Zeit anhält und

- „1" ausgibt, falls $w \in M$ und
- „0" ausgibt, falls $w \notin M$.

Eine Menge M heißt *rekursiv aufzählbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der eine (möglicherweise unendliche) Sequenz ausgibt, für die gilt: ein Element kommt genau dann in der Sequenz vor, wenn es in M enthalten ist.

Seien Ax und R rekursiv entscheidbare Formelmengen in einem deduktiven System $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathrm{Ax}, R)$. Zeigen Sie, dass

a) die Menge der Beweise im Kalkül (Ax, R) entscheidbar ist und

b) $T(\mathcal{F})$ rekursiv aufzählbar ist.

Es genügt dabei jeweils eine stichpunktartige Beschreibung des Verfahrens.

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich bei $\mathcal{F}$ nicht unbedingt um $\mathcal{F}_0$ handelt.

Aufgabe 2.2 [Inkonsistenz]

Zeigen Sie, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist.

Aufgabe 2.3 [Beweisen in $\mathcal{F}_0$]

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen ohne die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$ zu verwenden. Sie können allerdings Aufgabe 2.2, das Deduktionstheorem und die Theoreme aus Beispiel 1.22 auf den Folien verwenden.

a) $\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to \neg A) \to \neg A$.

b) Ist B ein Axiom in $\mathcal{F}_0$, so gilt $\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to \neg B) \to \neg A$.

c) $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(A \to B) \to (B \to A)$.

Aufgabe 2.4 [Vollständige Operatorenmengen]

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass $\{\to, \neg\}$ eine vollständige Operatorenmenge ist.

Abgabe: bis 15. Mai 2012 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4