Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 10./11. Mai 2012

Präsenzaufgabe 2.1 [Gentzen-Kalkül]

a) Geben Sie eine Definition von *Korrektheit* für den Gentzen-Kalkül an.
b) Zeigen Sie, dass der Gentzen-Kalkül im obigen Sinne korrekt ist.
c) Zeigen Sie, dass sich die Axiome des Kalküls $\mathcal{F}_0$ im Gentzen-Kalkül ableiten lassen.

Präsenzaufgabe 2.2 [Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$]

Beweisen Sie Lemma 1.24 auf den Folien: Sei $A \equiv A(p_1, \ldots, p_n) \in F$, $n > 0$, wobei $p_1, \ldots, p_n$ die in A vorkommenden Aussagevariablen sind. Sei φ eine Bewertung. Ist

$$P_i := \begin{cases} p_i, & \text{falls } \varphi(p_i) = 1, \\ \neg p_i, & \text{falls } \varphi(p_i) = 0, \end{cases} \qquad A' := \begin{cases} A, & \text{falls } \varphi(A) = 1, \\ \neg A, & \text{falls } \varphi(A) = 0, \end{cases}$$

für $1 \leqslant i \leqslant n$, dann gilt $P_1, \ldots, P_n \vdash A'$.

Präsenzaufgabe 2.3 [Ableitungen in $\mathcal{F}_0$]

Geben Sie Beweise im Kalkül $\mathcal{F}_0$ für die folgenden Formeln an:

a) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$. Sie können das Deduktionstheorem und die bereits gegebenen Theoreme 1–7 aus den Folien benutzen.
b) $B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$. Sie können das Deduktionstheorem und die bereits gegebenen Theoreme 1–8 aus den Folien benutzen.

Präsenzaufgabe 2.4 [Vollständigkeit in Kalkülen]

Gegeben sei der Kalkül $\mathcal{K} = (\mathrm{Ax}, R)$, wobei R nur den Modus Ponens enthält und Ax durch nur ein Axiomenschema gegeben ist, nämlich $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

a) Zeigen Sie mittels Induktion nach n, dass für jeden Beweis $B_0, \ldots, B_n$ und für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt: jede atomare Aussage p kommt in B_i gerade oft vor.
b) Schließen Sie daraus, dass im Kalkül $\mathcal{K}$ nicht jede Tautologie herleitbar ist (selbst wenn in ihr nur $\neg$ und $\to$ als Junktoren auftreten).