SS 2012 20.6.2012

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 21./22.6.2012

**Präsenzaufgabe 5.1** [MSO auf Wörtern]

Es sei $\Sigma$ ein Alphabet und $\Phi$ die Menge der Formeln der Prädikatenlogik *zweiter Stufe*, in denen nur die folgenden Prädikate vorkommen:

- $p_a$, ein unäres Prädikat, für jedes $a \in \Sigma$,
- $<$, ein binäres Prädikat,
- suc, ein binäres Prädikat.

Jedem Wort $w \in \Sigma^+$ ordnen wir die Interpretation $I^w = (D^w, I_c^w, I_v^w)$ zu, wobei

- $D^w = \{1, \ldots, |w|\}$ ist die Menge der Positionen in $w$,
- für jedes $a \in \Sigma$ ist $I^w(p_a)$ die Menge der Positionen, die ein $a$ enthalten,
- $I^w(x < y) = 1$ genau dann, wenn $I^w(x) < I^w(y)$,
- $I^w(\mathrm{suc}(x, y)) = 1$ genau dann, wenn $I^w(y) = I^w(x) + 1$.

Zum Beispiel sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $w = ab$. Dann ist $D^w = \{1, 2\}$, $I^w(p_a) = \{1\}$ und $I^w(p_b) = \{2\}$. In dieser Situation gilt dann

$$I^w \models \exists x \exists y (x < y \wedge p_a(x)) \wedge \neg \exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z).$$

Die *von $A \in \Phi$ definierte Sprache* ist

$$L(A) = \{w \in \Sigma^+ \mid I^w \models A\}.$$

Die so definierte Logik nennt man auch *Monadic Second Order Logic* auf Wörtern.

a) Geben Sie eine Formel $A$ an mit $L(A) = \{a\}^+\{b\}^+, \ \Sigma = \{a, b\}$.

b) Geben Sie eine Formel $A$ an mit $L(A) = \Sigma^*\{a\}\Sigma^*\{b\}, \ \Sigma = \{a, b\}$.

c) Nehmen Sie an, dass es Symbole $r$, $a$ und $i$ in $\Sigma$ gibt, wobei $r$, $a$ und $i$ die Ereignisse *request*, *acknowledge* und *internal* repräsentieren. Geben Sie eine Formel $A$ an, sodass $L(A)$ die Menge der Wörter ist, in denen auf jedes Request-Ereignis irgendwann ein Acknowledge-Ereignis folgt.

**Präsenzaufgabe 5.2** [MSO auf Graphen]

a) Beschreiben Sie, analog zu Aufgabe 5.1,
   - einen Satz von Prädikaten und
   - eine Interpretation für jeden Graphen,

   so dass Sie Mengen von Graphen mittels Formeln beschreiben können.

b) Geben Sie eine Formel an, die genau die zusammenhängenden Graphen definiert.

**Präsenzaufgabe 5.3** [Unentscheidbarkeit]

Eine kontextfreie Grammatik heißt *linear*, wenn auf der rechten Seite jeder Regel höchstens ein Nichtterminal-Symbol vorkommt. Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist: Gegeben lineare kontextfreie Grammatiken $G_1$ und $G_2$, ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing$?

**Präsenzaufgabe 5.4** [Formeln der Prädikatenlogik]

a) Gegeben seien die Formeln $A \equiv \forall x \exists y p(x, y)$ und $B \equiv \exists y \forall x P(x, y)$. Welche von beiden folgt aus der anderen? Sind die Formeln äquivalent?

b) Ist die Formel $\forall x p(x) \to \exists x p(x)$ eine Tautologie?