SS 2012 18.07.2012

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 7

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 19./20.07.2012

Präsenzaufgabe 7.1 [Der Satz von Löwenheim-Skolem]

Eine Variante des Satzes von Herbrand lautet: Eine Formel in Prädikatenlogik erster Stufe ohne „=“ ist erfüllbar genau dann, wenn sie ein Herbrand-Modell besitzt.

a) Geben Sie eine erfüllbare Formel (mit „=“) an, die kein Herbrand-Modell hat.

b) Zeigen Sie: Zu jeder Formel A in Prädikatenlogik erster Stufe gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel A' (erster Stufe) ohne „=“.

c) Beweisen Sie: Zu jeder Formel A in Prädikatenlogik erster Stufe gibt es eine Formel A' ohne „=“, so dass gilt: A ist erfüllbar genau dann, wenn A ein Modell hat, das durch Quotientenbildung aus einem Modell für A' ergibt.

d) Schließen Sie aus den vorangehenden Teilaufgaben: Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe besitzt ein abzählbares Modell. *Hinweis:* Dieses Ergebnis ist auch als der Satz von Löwenheim-Skolem bekannt.

Präsenzaufgabe 7.2 [Resolution]

Gegeben sei die Formel

$$A \equiv \forall x\,[p(x) \wedge (q(z,b) \rightarrow \exists y(\neg q(x,y) \vee \neg p(y)))] \wedge \forall x \forall y q(x,y).$$

a) Bestimmen Sie eine zu A erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselnormalform.

b) Zeigen Sie mittels des Resolutionsverfahrens, dass A unerfüllbar ist.