

Übungen zur Vorlesung Logik  
Blatt 1

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 26. April 2013 12:00 Uhr

**Aufgabe 1.1** [Strukturelle Induktion]

Die *Tiefe*  $t(A)$  einer aussagenlogischen Formel  $A$  ist wie folgt definiert.

- Ist  $A$  eine atomare Formel, so ist  $t(A) = 0$ .
- Ist  $A \equiv (B * C)$  für einen binären Junktor  $*$ , so gilt

$$t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1.$$

- Ist  $A \equiv \neg(B)$ , so definieren wir  $t(A) = t(B) + 1$ .

Außerdem sei  $|A|$  die Länge der Formel  $A$ , d.h. die Anzahl der Zeichen in  $A$  (Klammern und Junktoren zählen also mit).

Beweisen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel  $A$

- a) die Anzahl der öffnenden Klammern mit der Anzahl der schließenden Klammern übereinstimmt.
- b)  $|A| \leq 5k + 1$ , wobei  $k$  die Anzahl der Junktorenvorkommen in  $A$  ist.
- c)  $|A| \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$ .

**Aufgabe 1.2** [Semantik von Formeln]

- a) Sei  $\varphi$  eine Bewertung mit  $\varphi(p) = 1$  und  $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$ . Berechnen Sie

$$\varphi(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$$

schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

- b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $q \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))$  eine Tautologie ist.
- c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $q \rightarrow p \models p \rightarrow q$ .
- d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $\neg p \vee \neg q \models \neg(p \wedge q)$ .

**Aufgabe 1.3** [Deduktionstheorem]

- a) Seien  $A_1, \dots, A_n, B$  aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B$  genau dann, wenn  $\models (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots (A_{n-1} \rightarrow (A_n \rightarrow B)) \dots)))$ .
- b) Sei  $\Sigma$  eine Menge aussagenlogischer Formeln und  $B$  eine aussagenlogische Formel. Zeigen Sie, dass  $\Sigma \models B$  genau dann, wenn  $\Sigma \cup \{\neg B\}$  unerfüllbar ist.

**Aufgabe 1.4** [Pfade in Wurzelbäumen]

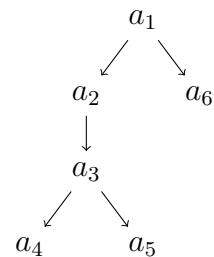
Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum, in dem ein Knoten als *Wurzel* ausgewählt ist und die Kanten so gerichtet sind, dass ihr Ursprungsknoten näher an der Wurzel liegt als ihr Zielknoten. Ein *Wurzelpfad* ist ein Pfad, der in der Wurzel beginnt (aber nicht notwendigerweise in einem Blatt endet). Für jeden Wurzelpfad  $P$  sei  $\hat{P}$  die Menge der Knoten, die er trifft. Eine Teilmenge der Knoten heißt *Wurzelpfadmenge*, falls sie von der Form  $\hat{P}$  ist für einen Wurzelpfad  $P$ .

Seien  $V = \{a_1, \dots, a_n\}$  die Knoten eines Wurzelbaums und  $p_1, \dots, p_n$  Aussagensymbole. Die Teilmengen von  $V$  und die Bewertungen auf  $p_1, \dots, p_n$  stehen in Bijektion, wobei die Teilmenge  $S \subseteq V$  mit der Belegung  $\varphi$  korrespondiert, für die

$$\varphi(p_i) = 1 \text{ genau dann, wenn } a_i \in S$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

- a) Geben Sie für den nebenstehenden Wurzelbaum eine Formel  $A$  an, für die gilt:  $\varphi(A) = 1$  genau dann, wenn  $\varphi$  zu einer Wurzelpfadmenge korrespondiert.
- b) Geben Sie ein allgemeines Verfahren an, das aus einem Wurzelbaum  $T$  eine Formel  $A$  konstruiert, so dass  $\varphi(A) = 1$  genau dann, wenn  $\varphi$  zu einer Wurzelpfadmenge von  $T$  korrespondiert.



**Abgabe: bis 26. April 2013 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**