SS 2014 7. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 16. Mai 2014 12:00 Uhr

Aufgabe 2.1 [Endlich erfüllbare Formelmengen]

Zeigen Sie, dass die folgende im Beweis des Kompaktheitssatzes verwendete Aussage gilt. Es sei Δ eine endlich erfüllbare Formelmenge so, dass für jede Formel A gilt: $A \in \Delta$ oder $\neg A \in \Delta$. Die Belegung φ sei definiert durch

$$\varphi(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in \Delta, \\ 0 & \text{falls } p \notin \Delta \end{cases}$$

für jede Variable p. Dann erfüllt φ jede Formel in Δ.

Aufgabe 2.2 [Kompaktheitssatz]

Es sei $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ eine Folge von erfüllbaren Formelmengen. Zeigen Sie, dass dann auch $\Sigma = \bigcup_{i \geqslant 0} \Sigma_i$ erfüllbar ist. Gilt dies auch, wenn nicht vorausgesetzt wird, dass $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 2.3 [Logische Äquivalenz]

Zeigen Sie, dass die logische Äquivalenz eine Kongruenzrelation ist, dass also gilt: Wenn $A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} A'$ und $B \mathrel{\models\!\!\!\dashv} B'$, dann gilt auch $\neg A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg A'$ und $(A * B) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (A' * B')$ für jeden binären Junktor $*$.

Aufgabe 2.4 [Vollständige Junktorenmengen]

Für eine Menge M von Junktoren sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge der Formeln, in denen als Junktoren nur solche aus M vorkommen. Eine Menge M von Junktoren heißt *vollständig*, wenn es für jede Formel A eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}(M)$ gibt.

a) Nehmen Sie an, wir hätten den Junktor $\bar{\wedge}$ („NAND“), so dass für Formeln A,B und Belegungen φ gilt: $\varphi(A \bar{\wedge} B) = 1 - \min\{\varphi(A), \varphi(B)\}$. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\{\bar{\wedge}\}$ eine vollständige Junktorenmenge ist.

b) Für Belegungen φ_1, φ_2 schreiben wir $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$, wenn für jede Aussagenvariable p gilt $\varphi_1(p) \leqslant \varphi_2(p)$. Wir nennen eine Formel A *monoton*, wenn für Belegungen φ_1, φ_2 mit $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ stets gilt $\varphi_1(A) \leqslant \varphi_2(A)$ (mit anderen Worten: die Boolesche Funktion zu A ist monoton). Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel in $\mathcal{F}(\{\wedge, \vee\})$ monoton ist.

c) Folgern Sie aus b), dass $\{\wedge, \vee\}$ keine vollständige Junktorenmenge ist.

d) Nehmen Sie an, dass als atomare Formeln auch $\bot$ und $\top$ zugelassen sind, die für jede Bewertung φ die Gleichungen $\varphi(\bot) = 0$ und $\varphi(\top) = 1$ erfüllen. Zeigen Sie, dass es dann zu jeder monotonen Formel A eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}(\{\wedge, \vee\})$ gibt (Hinweis: Passen Sie das Verfahren an, das aus einer Wertetabelle eine DNF abliest und betrachten Sie ausschließlich positive Literale). Beweisen Sie hierbei auch, dass Ihr Verfahren tatsächlich eine äquivalente Formel liefert.

Abgabe: bis 16. Mai 2014 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4