Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 27. Juni 2014 12:00 Uhr

Aufgabe 5.1 [Semi-Entscheider]
Es sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge der Wörter über Σ. Ein *Semi-Entscheider* für eine Menge $M \subseteq \Sigma^*$ ist ein Algorithmus, der eine Eingabe $x \in \Sigma^*$ erhält und

- terminiert und „ja“ antwortet, falls $x \in M$, und
- nicht terminiert, falls $x \notin M$.

Ein *Entscheider* für M ist dagegen ein Algorithmus, der eine Eingabe $x \in \Sigma^*$ erhält, in jedem Fall terminiert und dann

- mit „ja“ antwortet, falls $x \in M$ und
- mit „nein“ antwortet, falls $x \notin M$.

Beachten Sie, dass jede Menge, für die es einen Entscheider gibt, auch einen Semi-Entscheider besitzt.

Zeigen Sie: Wenn es sowohl einen Semi-Entscheider für M gibt als auch einen Semi-Entscheider für $\Sigma^* \backslash M$, dann gibt es sogar einen Entscheider für M.

Aufgabe 5.2 [Funktionssymbole und Herbrand-Expansion]

a) Es sei A eine prädikatenlogische Formel in Skolem-Normalform, in der keine Funktionssymbole mit Stelligkeit $\geqslant 1$ vorkommen. Zeigen Sie, dass die Herbrand-Expansion von A endlich ist.
b) Geben Sie ein Verfahren an, das für solche Formeln entscheidet, ob sie erfüllbar sind.

Aufgabe 5.3 [Mächtigkeit von Datenbereichen]
Für eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ schreiben wir $|\mathcal{M}|$ für $|D|$, die Mächtigkeit von D. Wir nennen $\mathcal{M}$ *endlich*, falls die Menge D endlich ist.

a) Geben Sie eine abgeschlossene Formel A an, für die gilt: $\mathcal{M} \models A$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| = 1$.
b) Es sei B eine Formel, in der „=“ nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell $\mathcal{M}$ für B ein Modell $\mathcal{M}'$ für B konstruiert werden, so dass $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}| + 1$? Dass $\mathcal{M}'$ Modell für B ist, muss hier nicht unbedingt bewiesen werden.
c) Schließen Sie aus b), dass es keine Formel gibt, die ohne „=“ auskommt und äquivalent zu obiger Formel A ist.

Aufgabe 5.4 [Eliminierung von „=“]
In dieser Aufgabe nennen wir eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ *abzählbar*, wenn ihr Datenbereich D abzählbar ist.

a) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem aus einer Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel A' gewonnen werden kann, in der „=“ nicht vorkommt. Dabei soll außerdem gelten, dass es für jedes abzählbare Modell $\mathcal{M}$ für A' ein abzählbares Modell $\overline{\mathcal{M}}$ für A gibt. Hier genügt es, die Konstruktion der Formel A' zu skizzieren und in der Beschreibung des Modells $\overline{\mathcal{M}}$ reicht es aus, den Datenbereich zu erläutern.

b) Leiten Sie aus dem ersten Aufgabenteil den Satz von Löwenheim-Skolem ab.

Abgabe: bis 27. Juni 2014 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4