Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 6

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 11. Juli 2014, 12:00 Uhr

Aufgabe 6.1 [Nicht-Standard-Modelle]

Es sei $S = (F, P)$ die Signatur mit Funktionssymbolen $F = \{\mathsf{0}/0, \mathsf{1}/0, +/2, */2\}$ und Prädikatsymbolen $P = \{\leqslant/2\}$. Außerdem sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathbb{N}})$ die S-Struktur, in der der Datenbereich aus den natürlichen Zahlen besteht und die Symbole $\mathsf{0}$, $\mathsf{1}$, $+$, $\leqslant$ und $*$ wie üblich interpretiert sind. Schließlich sei $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$ die Menge aller geschlossenen Formeln, für die $\mathcal{N}$ ein Modell ist.

a) Betrachten Sie die Formelmenge

$$\mathcal{T}'_{\mathcal{N}} = \mathcal{T}_{\mathcal{N}} \cup \{\underbrace{\mathsf{1} + \cdots + \mathsf{1}}_{n} \leqslant \mathsf{x} \mid n \geqslant 1\},$$

wobei x eine Variable ist. Zeigen Sie, dass die Formelmenge $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ erfüllbar ist. *Hinweis:* Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

b) Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ Strukturen über derselben Signatur S'. Die Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ heißen *elementar äquivalent*, wenn für jede geschlossene Formel A der Prädikatenlogik über S' gilt: $\mathcal{M} \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{M}' \models A$. Zeigen Sie, dass jede Struktur $\mathcal{M}$, die $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ erfüllt, elementar äquivalent ist zum obigen Modell $\mathcal{N}$.

c) Sind $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\mathcal{M}' = (D', I')$ Strukturen über der selben Signatur, dann nennen wir $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ *isomorph*, wenn es eine Bijektion $\varphi : D \to D'$ gibt mit

$$\begin{aligned} p^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_k) &= p^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_k)) && \text{für alle } d_1, \ldots, d_k \in D \text{ und} \\ \varphi(f^{\mathcal{M}}(d_1, \ldots, d_\ell)) &= f^{\mathcal{M}'}(\varphi(d_1), \ldots, \varphi(d_\ell)) && \text{für alle } d_1, \ldots, d_\ell \in D \end{aligned}$$

für jedes k-stellige Prädikatssymbol p und jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f. Schließen Sie aus a) und b), dass es eine Struktur gibt, die elementar äquivalent, aber nicht isomorph ist zu $\mathcal{N}$. Hierfür müssen Sie eine Eigenschaft des Modells für $\mathcal{T}'_{\mathcal{N}}$ angeben, die $\mathcal{N}$ nicht besitzt.

Aufgabe 6.2 [Der Kompaktheitssatz für die Prädikatenlogik]

Es sei A eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}$ besitzt mit $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel B_n an, so dass für jede Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models B_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

b) Betrachten Sie die Menge $\Sigma = \{A \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes für Prädikatenlogik erster Stufe, dass Σ erfüllbar ist.

c) Zeigen Sie, dass A ein unendliches Modell besitzt.

d) Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, so dass $\mathcal{M} \models E$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ eine endliche Domäne besitzt.

Aufgabe 6.3 [Logische Folgerung]

a) Es sei B eine Formel, in der die Variable x nicht frei vorkommt. Zeigen Sie mittels Satz 5.4 und Bemerkung 5.2 in den Folien, dass

$$\models A \to B \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \models \exists x A \to B.$$

b) Im Generalisierungstheorem (in Satz 5.4) wird vorausgesetzt, dass x in keiner Formel von Γ frei vorkommt. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass diese Voraussetzung nicht fallengelassen werden kann. Mit anderen Worten: Geben Sie eine Formelmenge Γ und eine Formel A an, für die eine der Aussagen „$\Gamma \models A$“ und „$\Gamma \models \forall x A$“ gilt, die andere aber nicht.

Abgabe: bis 11. Juli 2014, 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4