

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 2

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Bearbeitung am 15./16. Mai 2014

Präsenzaufgabe 2.1 [Inkonsistenz]

Zeigen Sie, dass $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist. Sie können das Deduktionstheorem und die bereits gegebenen Lemmas 0–7 aus den Vorlesungsaufzeichnungen benutzen.

Präsenzaufgabe 2.2 [Korrektheit von \mathcal{F}_0]

Ein Kalkül \mathcal{K} heißt *korrekt*, falls für jede Formelmenge Σ und jede Formel A gilt: Wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} A$, dann $\Sigma \models A$. Zeigen Sie, dass der Kalkül \mathcal{F}_0 korrekt ist.

Präsenzaufgabe 2.3 [Beweise im Kalkül \mathcal{F}_0]

Zeigen Sie

- a) $\neg(p \rightarrow q) \vdash_{\mathcal{F}_0} q \rightarrow p$
- b) $r \rightarrow \neg(p \rightarrow p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$
- c) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
- d) $\vdash_{\mathcal{F}_0} p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$

Sie können Lemmas 0–7 aus den Vorlesungsaufzeichnungen, Präsenzaufgabe 2.1 und das Deduktionstheorem, *nicht jedoch* die Vollständigkeit von \mathcal{F}_0 benutzen. Die Inkonsistenzregel (Präsenzaufgabe 2.1) soll dabei in mindestens einer Teilaufgabe verwendet und in mindestens einer Teilaufgabe vermieden werden.

Präsenzaufgabe 2.4 [Vollständigkeit in Kalkülen]

Sie werden in der Vorlesung sehen, dass der Kalkül \mathcal{F}_0 *vollständig* ist, dass sich also jede Tautologie in \mathcal{F}_0 ableiten lässt. In dieser Aufgabe lernen Sie einen Kalkül kennen, der nicht vollständig ist.

Gegeben sei der Kalkül $\mathcal{K} = (\text{Ax}, R)$, wobei R nur den Modus Ponens enthält und Ax durch nur ein Axiomenschema gegeben ist, nämlich $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

- a) Zeigen Sie mittels Induktion nach n , dass für jeden Beweis B_0, \dots, B_n und für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt: jede atomare Aussage p kommt in B_i gerade oft vor.
- b) Schließen Sie daraus, dass im Kalkül \mathcal{K} nicht jede Tautologie herleitbar ist (selbst wenn in ihr nur \neg und \rightarrow als Junktoren auftreten).

Zusatzaufgabe:

1. Beweisen Sie den zweiten und dritten Punkt von Bemerkung 2.5 auf den Folien.
2. Beweisen Sie die ersten beiden Punkte von Lemma 2.6 auf den Folien.