SS 2014 28. Mai 2014

Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 3

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 30. Mai, 2. und 3. Juni 2014

Präsenzaufgabe 3.1 [Königs Lemma]

Das *Ballspiel nach Smullyan* wird von einer Person gespielt und verläuft nach folgenden Regeln: Es steht ein Behältnis zur Verfügung, das unbegrenzt viele Bälle fassen kann. Ferner gibt es einen unbegrenzten Vorrat an Bällen, von denen jeder mit einer natürlichen Zahl beschriftet ist. Am Anfang enthält das Behältnis einen Ball. Es kann nun in jedem Schritt des Spiels ein Ball aus dem Behältnis entnommen werden und dafür beliebig (aber endlich) viele Bälle eingefüllt werden, deren Beschriftung allerdings kleiner sein muss als die des entnommenen Balls. Das Spiel ist zu Ende, wenn kein Schritt mehr möglich ist, d.h. wenn das Behältnis leer ist.

Zeigen Sie, dass jedes Spiel nach endlich vielen Schritten zum Ende kommt.

Präsenzaufgabe 3.2 [Davis-Putnam-Verfahren]

a) Warum ist es notwendig, dass die bearbeitete Formel im Davis-Putnam-Verfahren in Negationsnormalform ist? (D.h.: An welcher Stelle gibt das Verfahren sonst falsche Antworten?).

b) Sei $F = \{K_1, \ldots, K_n\}$ eine Formel in KNF in Mengenschreibweise. Außerdem sei $K_i \subseteq K_j$. Zeigen Sie, dass dann $F \mathrel{\models\!\!\!\dashv} F'$, worin $F' = F \backslash \{K_j\}$. Damit haben Sie die Korrektheit der Subsumptionsregel bewiesen.

c) Bestimmen Sie mittels des Davis-Putnam-Verfahrens, ob die folgende Formel erfüllbar ist:

$$\neg p \wedge (\neg t \vee q \vee p) \wedge (\neg s \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q \vee t) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \neg r \wedge (\neg s \vee \neg q \vee s)$$

Präsenzaufgabe 3.3 [Resolutionskalkül]

a) Seien K_1, K_2 Klauseln und I ein Literal mit $I \in K_1$ und $\neg I \in K_2$. Außerdem sei R die Resolvente von K_1 und K_2 nach I. Zeigen Sie, dass $\{K_1, K_2\} \models R$.

b) Zeigen Sie, dass eine Klausel K mit $p, \neg p \in K$ im Resolutionskalkül ignoriert werden kann.

c) Zeigen Sie per Resolution, dass $(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \neg(\neg r \wedge p))$ eine Tautologie ist. *Hinweis:* Der Resolutionskalkül kann nur auf Formeln in KNF angewandt werden.

Präsenzaufgabe 3.4 [Negationsnormalform]

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel eine äquivalente Formel in Negationsnormalform besitzt. *Hinweis:* Damit die Induktion funktioniert, wählen Sie als Induktionsbehauptung, dass sowohl A als auch $\neg A$ eine Negationsnormalform besitzt.