SS 2015 15. Juli 2015

Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 7

Prof. Dr. Roland Meyer Abgabe bis 24. Juli 2015, 12:00 Uhr

Dieses Blatt ist im folgenden Sinne **freiwillig** und bringt **Bonuspunkte**:

- Der entsprechende Vorlesungsstoff ist **klausurrelevant**.
- Die 9 Punkte, die Sie durch dieses Blatt erhalten können, werden nicht zur maximalen Punktzahl hinzugerechnet. Das heißt, Sie benötigen 60% der Punkte der ersten sechs Einreichblätter (also $25 = 0.6 * 42$ Punkte), um zur Klausur zugelassen zu werden.
- Die Punkte, die Sie für die Bearbeitung dieses Blattes erhalten, werden trotzdem als Bonuspunkte auf ihr Punktekonto addiert. (Es ist also insgesamt möglich, bis zu 51 Punkte zu erhalten.)
- Die Rückgabe Ihrer korrigierten Abgaben zu diesem Blatt erfolgt bei der Fragestunde am 13.08 oder nach individueller Absprache mit Ihrem Tutor.

Aufgabe 7.1 [Tableaux I, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) Zeigen Sie mittels eines Tableaus, dass die Formel

$$\Big(\forall x \forall y(\neg\neg p(x,y) \to p(y,x)) \wedge \forall x \exists y p(x,y)\Big) \to \forall x \exists y p(y,x)$$

allgemeingültig ist.

b) Zeigen Sie mittels eines Tableaus, dass die Formel

$$\neg\Big(\forall x\big[p(x) \to p(f(x))\big] \to \forall x\big[p(x) \to p(f(f(x)))\big]\Big)$$

unerfüllbar ist.

Aufgabe 7.2 [Tableaux II, 1 Punkt]

Für eine Formelmenge $\Sigma \subseteq \mathsf{FO}(S)$ und eine Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ schreiben wir $\Sigma \vdash_\tau A$, falls es ein abgeschlossenes Tableau zu $\Sigma \cup \{\neg A\}$ gibt.

Es seien $\Sigma \subseteq \mathsf{FO}(S)$ eine Formelmenge und $A, B \in \mathsf{FO}(S)$ *atomare* Formeln mit $\Sigma \vdash_\tau A$ und $\Sigma \vdash_\tau A \to B$. Beweisen Sie, dass dann auch $\Sigma \vdash_\tau B$ gilt.

Bitte umdrehen!

Aufgabe 7.3 [Vollständigkeit und Konsistenz, 2 Punkte]

Sei Σ eine Theorie. Zeigen Sie:
Σ ist vollständig genau dann, wenn es keine Formel A gibt, so dass $T_{\Sigma \cup \{A\}}$ und $T_{\Sigma \cup \{\neg A\}}$ beide konsistent sind.

Hinweis: Sie haben also gezeigt, dass Vollständigkeit einer Theorie bedeutet, dass sich diese nicht auf sich widersprechende Weisen konsistent erweitern lässt.

Aufgabe 7.4 [Vollständige Theorien, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

Wie auf Präsenzblatt 6 erwähnt, nennt man zwei Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ *elementar äquivalent*, falls $T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}'}$.

Es sei T eine konsistente Theorie. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn T vollständig ist, dann sind je zwei Modelle von T elementar äquivalent.

b) Wenn je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind, dann ist T vollständig.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 7.3.

Aufgabe 7.5 [Presburger-Arithmetik, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

Betrachten Sie die Signatur

$$S = (\{+/2\}, \{\}),$$

die keine Prädikatsymbole enthält, aber ein zweistelliges Funktionssymbol „+“. In Formeln über S schreiben wir, wie üblich, statt $+(x, y)$ auch $x + y$.

Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ mit Datenbereich $\mathbb{N}$, wobei $+$ wie üblich interpretiert ist. Entsprechend bezeichnet $\mathcal{Z}$ die Struktur $(\mathbb{Z}, +)$, die als Datenbereich statt $\mathbb{N}$ die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfasst.

Wir nennen eine Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ *flach*, falls alle atomaren Formeln in A von der Form $x = y$ oder $x + y = z$ sind.

a) Beschreiben Sie, wie zu einer Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine flache Formel $A' \in \mathsf{FO}(S)$ konstruiert werden kann, sodass $\mathcal{Z} \models A$ genau dann wenn $\mathcal{Z} \models A'$.

b) Geben Sie ein Verfahren an, dass zu einer Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine Formel $B \in \mathsf{FO}(S)$ konstruiert, sodass $\mathcal{Z} \models A$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models B$.

In beiden Teilaufgaben reicht es die Konstruktion anzugeben; Es ist nicht nötig ihre Korrektheit zu beweisen.

Hinweis: Die Theorie über der Struktur $\mathcal{N}$ wird Presburger-Arithmetik genannt. Man kann unter anderem zeigen, dass man, gegeben eine Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$, entscheiden kann ob $\mathcal{N} \models A$ gilt. Mit Teilaufgabe b) haben Sie gezeigt, dass man entscheiden kann, ob $\mathcal{Z} \models A$ gilt.

Abgabe: bis 24. Juli 2015, 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4