Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 4

Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 11./12. Juni 2015

Präsenzaufgabe 4.1 [Kompaktheitssatz revisited]

Sei $A \in F$ eine Formel und sei $\Sigma \subseteq F$ eine Menge von Formeln, so dass für jede Bewertung φ gilt:

$$\varphi(A \to B) = 1$$

für mindestens ein $B \in \Sigma$.

Zeigen Sie: Es gibt eine endliche Teilmenge $\{B_1, ..., B_k\} \subseteq \Sigma$, so dass

$$A \to (B_1 \vee ... \vee B_k)$$

eine Tautologie ist.

Hinweis: Führen Sie einen Beweis durch Widerspruch.

Präsenzaufgabe 4.2 [Modellierung: Syntax der Prädikatenlogik]

Drücken Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe aus. Spezifizieren Sie dabei insbesondere Stelligkeiten und intendierte Bedeutung der Funktions- und Prädikatensymbole. Dabei soll sich möglichst viel Struktur der Aussage in der Struktur der Formel wiederfinden: Die Aussage „Alle Vögel sind schon da“ soll also nicht mit der Formel p ausgedrückt werden, sondern z.B. mit

$$\forall x \ \ (p_{\mathsf{vogel}}(x) \to p_{\mathsf{schonda}}(x))\,.$$

a) Nur Tage, an denen es nicht regnet, sind gute Tage.
b) Jedes rote Buch ist informativer als jedes blaue.
c) Es gibt ein Buch, dessen Autoren alle berühmt sind.
d) Jedes Buch, dessen Autoren alle berühmt sind, ist interessant.

Bitte umdrehen!

Präsenzaufgabe 4.3 [Modellierung: Semantik der Prädikatenlogik]

Nehmen Sie an, die Signatur S enthalte die einstelligen Prädikate p_{IstFisch} und $p_{\text{KannSchwimmen}}$. Gegeben sei die Formel

$$A \equiv \forall x\ (p_{\text{KannSchwimmen}}(x) \to p_{\text{IstFisch}}(x)).$$

(Beachten Sie, dass diese Formel keine freien Variablen enthält.)

a) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M}$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$.

b) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$, wobei $D = \{\text{Ente}, \text{Karpfen}, \text{Hering}\}$.

Präsenzaufgabe 4.4 [Semantik der Prädikatenlogik]

In den Folien wird die Semantik einer Formel $A \in FO(S)$ in $\mathcal{M} = (D, I)$ definiert als eine Funktion

$$\mathcal{M}[\![A]\!] : D^V \to \mathbb{B}.$$

Es gibt eine natürliche Entsprechung zwischen Funktionen $D^V \to \mathbb{B}$ und Teilmengen von D^V: Der Funktion $f\colon D^V \to \mathbb{B}$ entspricht die Teilmenge $\{\sigma \in D^V \mid f(\sigma) = 1\}$. Daher können wir die Semantik einer Formel A auch als eine Teilmenge von D^V definieren.

a) Erinnern Sie sich daran, dass für zwei Mengen M, N die Menge M^N als die Menge der Funktionen $\{\sigma : N \to M\}$. definiert ist. Erklären Sie, warum $M^{\mathbb{B}}$ der Menge $M \times M$ und $\mathbb{B}^M$ der Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ entspricht.

b) Definieren Sie die Semantik der Formeln

- $t_1 = t_2$,
- $p(t_1, \ldots, t_k)$,
- $\neg A$,
- $A \wedge B$,
- $A \vee B$,
- $\forall x A$

als Teilmengen von D^V.

Die Semantik eines Terms t soll dabei weiterhin eine Abbildung

$$\mathcal{M}[\![t]\!]\colon D^V \to D$$

sein.

Hinweis: Benutzen Sie Mengenoperatoren.