Präsenzübungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Prof. Dr. Roland Meyer Bearbeitung am 25. und 26. Juni 2015

Präsenzaufgabe 5.1 [Eliminierung von „=“]

In dieser Aufgabe nennen wir eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ *abzählbar*, wenn ihr Datenbereich D abzählbar ist.

Geben Sie ein Verfahren an, mit dem aus einer Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $A' \in \mathsf{FO}(S)^{\neq}$ gewonnen werden kann, wobei $\mathsf{FO}(S)^{\neq}$ alle Formeln in $\mathsf{FO}(S)$ enthält, in denen „=“ nicht vorkommt.

Dabei soll außerdem gelten, dass es für jedes *abzählbare* Modell $\mathcal{M}$ für A' ein *abzählbares* Modell $\overline{\mathcal{M}}$ für A gibt.

Präsenzaufgabe 5.2 [Semi-Entscheider]

Es sei Σ ein Alphabet und Σ^* die Menge der Wörter über Σ. Ein *Semi-Entscheider* für eine Menge $M \subseteq \Sigma^*$ ist ein Algorithmus, der eine Eingabe $x \in \Sigma^*$ erhält und

- terminiert und „ja“ antwortet, falls $x \in M$, und
- nicht terminiert, falls $x \notin M$.

Ein *Entscheider* für M ist dagegen ein Algorithmus, der eine Eingabe $x \in \Sigma^*$ erhält, *in jedem Fall terminiert* und dann

- mit „ja“ antwortet, falls $x \in M$, und
- mit „nein“ antwortet, falls $x \notin M$.

Zeigen Sie:

a) Wenn es für eine Menge M einen Entscheider gibt, dann gibt es auch Semi-Entscheider für M und ihr Komplement $\Sigma^* \backslash M$.

b) Wenn es sowohl für eine Menge M als auch für ihr Komplement $\Sigma^* \backslash M$ Semi-Entscheider gibt, dann gibt es auch einen Entscheider für M.

Präsenzaufgabe 5.3 [Unentscheidbarkeit von Leerheit]

Eine kontextfreie Grammatik heißt *linear*, wenn auf der rechten Seite jeder Regel höchstens ein Nichtterminal-Symbol vorkommt. Ein Beispiel für eine solche Grammatik ist

$$S \to aSa, \qquad S \to bSb, \qquad S \to a, \qquad S \to b, \qquad S \to \varepsilon,$$

wobei ε das leere Wort bezeichnet. Die von der Beispielgrammatik erzeugte Sprache ist die Menge aller Wörter über a und b, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind.

Sie dürfen die folgenden beiden Aussagen verwenden:

- Das folgende Problem ist entscheidbar:
  Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort w.
  Frage: Gilt $w \in L(G)$?
- Das folgende Problem ist unentscheidbar:
  Gegeben: Lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
  Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing$?
  (*Hinweis:* Der Beweis diese Aussage verwendet eine ähnliche Reduktion wie der Beweis der Unentscheidbarkeitsbeweis, den Sie nächste Woche in der Vorlesung sehen werden.)

a) Zeigen Sie, dass das folgende Problem semi-entscheidbar ist:
Gegeben: Lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \varnothing$?

b) Zeigen Sie, dass das folgende Problem nicht semi-entscheidbar ist:
Gegeben: Lineare kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing$?

Präsenzaufgabe 5.4 [Funktionssymbole und Herbrand-Expansion]

a) Es sei A eine prädikatenlogische Formel in Skolem-Normalform über einer Signatur mit nur endlich vielen Funktions- und Prädikatssymbolen, in der keine Funktionssymbole vorkommen, deren Stelligkeit größer als 0 ist.
Zeigen Sie, dass die Herbrand-Expansion von A endlich ist.

b) Geben Sie ein Verfahren an, das für solche Formeln entscheidet, ob sie erfüllbar sind.