Variablen-Umbenennungen

Ziel: Beschreibung der Wahlfreiheit für allgemeinste Unifikatoren

Gezeigt: Ein allgemeinster Unifikator kann gefunden werden.

Frage: Wie sehen die anderen aus?

Definition 1. *Eine* Variablen-Umbenennung *ist eine Substitution der Form* $\Theta = \{x_1/y_1, \dots, x_n/y_n\}$*, wobei* $y_1, \dots, y_n$ *Variablen sind.*

Satz 1 (Eindeutigkeit des allgemeinsten Unifikators)**.** *Für jede Literalmenge gibt es bis auf Variablen-Umbenennungen nur einen allgemeinsten Unifikator. Das heißt: Sind* Θ_1 *und* Θ_2 *allgemeinste Unifikatoren einer Literalmenge* M*, dann gibt es eine Variablen-Umbenennung* $\tilde{\Theta}$ *mit* $\Theta_2 = \Theta_1\tilde{\Theta}$*.*

Beweis. Es seien Θ_1 und Θ_2 allgemeinste Unifikatoren der Literalmenge M.

- Nach der Definition allgemeinster Unifikatoren gibt es dann Substitutionen $\tilde{\Theta}_1$ und$\tilde{\Theta}_2$ mit $\Theta_1 = \Theta_2\tilde{\Theta}_2$ und $\Theta_2 = \Theta_1\tilde{\Theta}_1$. Damit gilt also auch

  $$\Theta_1 = \Theta_2\tilde{\Theta}_2 = \Theta_1\tilde{\Theta}_1\tilde{\Theta}_2 \qquad (*)$$

- Es sei $V_1 = \bigcup_{x \text{ Variable}} V(x\Theta_1)$, also die Menge der Variablen, die im Bild von Θ_1 vorkommen. Gleichung $(*)$ impliziert, dass $x\tilde{\Theta}_1\tilde{\Theta}_2 = x$ für jedes $x \in V_1$. Insbesondere ist $x\tilde{\Theta}_1$ eine Variable für jedes $x \in V_1$.

- Wir definieren:

  $$x\tilde{\Theta} = \begin{cases} x\tilde{\Theta}_1 & \text{falls } x \in V_1 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

  Man beachte, dass dann $\tilde{\Theta}$ eine Variablen-Umbenennung ist. Außerdem stimmt $Th\tilde{e}ta$ mit $\tilde{\Theta}_1$ auf allen Variablen in V_1 überein. Deshalb gilt:

  $$\Theta_1\tilde{\Theta} = \Theta_1\tilde{\Theta}_1 = \Theta_2.$$

□

Prädikatenlogische Resolution

Ziel Verallgemeinerun aussagenlogischer Resolution auf Prädikatenlogik.

Naiver Ansatz Aussagenlogische Resolution für Herbrand-Expansion durchführen.

Nachteil dabei Erfordert Raten der richtigen Grundsubstitution am Anfang.

Prädikatenlogische Resolution arbeitet daher direkt mit Klauseln, die noch Variablen enthalten.

Definition 2 (Prädikatenlogische Resolvente). *Es seien* K_1, K_2 *prädikatenlogische Klauseln und* Θ_1,Θ_2 *Variablen-Umbenennungen, so dass* $K_1\Theta_1$ *und* $K_2\Theta_2$ *disjunkte Variablenmengen haben.*

Falls es Literale $L_1, \ldots, L_m \in K_1\Theta_1$ *und* $L'_1, \ldots, L'_n \in K_2\Theta_2$ *gibt, so dass*

$$\{\overline{L_1}, \ldots, \overline{L_m}, L'_1, \ldots, L'_n\}$$

unifizierbar ist mit allgemeinstem Unifikator Θ*, dann heißt*

$$R := \big((K_1\Theta_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (K_2\Theta_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\})\big)\Theta$$

prädikatenlogische Resolvente von K_1 und K_2.

Beispiel:

$$\begin{tikzcd}
\{p(f(x)), \neg q(z), p(z)\} \arrow[ddr, dash] & & \{\neg p(x), r(g(x), a)\} \arrow[d, "\{x/y\}"] \\
& & \{\neg p(y), r(g(y), a)\} \arrow[dl, dash, "\{z/f(x), y/f(x)\}"] \\
& \{\neg q(f(x)), r(g(f(x)), a)\} &
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{p(f(x)), \neg q(z), p(z)\}, \\
K_2 &= \{\neg p(x), r(g(x), a)\}, \\
\Theta_1 &= \{\}, \\
\Theta_2 &= \{x/y\}, \\
\Theta &= \{z/f(x), y/f(x)\}, \\
R &= \{\neg q(f(x)), r(g(f(x)), a)\}.
\end{aligned}$$

Definition 3 (Herleitung). *Es seien* Σ *eine Menge von Klauseln und* K *eine Klausel. Eine Folge* $K_1, \ldots, K_n$ *von Klauseln mit* $K_n \equiv K$ *ist eine* Herleitung von K aus Σ, *in Zeichen* $\Sigma \vdash_{Res} K$*, falls für* $1 \leqslant k \leqslant n$*:*

(i) $K_k \in \Sigma$ *oder*

(ii) es gibt $i, j < k$*, so dass* K_k *prädikatenlogische Resolvente von* K_i *und* K_j *ist.*

Satz 2 (Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit, Robinson). *Es sei* $A \equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n B$ *geschlossen und in Skolemform, wobei* B *in KNF ist. Dann ist* A *unerfüllbar genau dann, wenn* $B \vdash_{Res} \sqcup$*.*

Bemerkungen zum Satz:

Korrektheit Ähnlich zum aussagenlogischen Fall

Widerlegungsvollständigkeit Zu einer Herleitung $K_1', \dots, K_n'$ aus Klauseln von Formeln in $E(A)$ mittels aussagenlogischer Resolution konstruiere Herleitung $K_1, \dots, K_n$ mittels prädikatenlogischer Resolution, so dass K_i' eine Grundinstanz von K_i ist für $1 \leqslant i \leqslant n$. Beweis in der Übung.

Die Konstruktion verwendet folgendes Lemma:

Lemma 1 (Lifting-Lemma)**.** *Es seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln und K_1', K_2' Grundinstanzen von K_1, K_2 mit aussagenlogischer Resolvente R'. Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1, K_2, so dass R' Grundinstanz von R ist.*

Als Bild:

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[d] \arrow[dr, dash] & & K_2 \arrow[d] \arrow[dl, dash] \\
K_1' \arrow[dr, dash] & R \arrow[d] & K_2' \arrow[dl, dash] \\
& R' &
\end{tikzcd}$$

Hier steht wieder ein Pfeil für eine Substitution und gerade Linen ohne Pfeilspitze für einen Resolutionsschritt.

Beweis.

- Wir führen den Beweis für den Fall, dass K_1 und K_2 variablendisjunkt sind. Der allgemeine Fall wird in der Übung besprochen.
- Da K_i' Grundinstanz von K_i ist, gibt es eine Substitution Θ_i mit $K_i' = K_i\Theta_i$ für $i = 1, 2$.
- Da K_1 und K_2 variablendisjunkt sind, können wir die Substitution $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ bilden, die sich auf den Variablen von K_1 so verhält wie Θ_1 und auf denen von K_2 so verhält wie Θ_2.
- R' ist Resolvente von K_1' und K_2', also gibt es ein Literal L mit $\overline{L} \in K_1'$ und $L \in K_2'$ und $R' = K_1' \setminus \{\overline{L}\} \;\cup\; K_2' \setminus \{L\}$
- Es seien $L_1, \dots, L_m$ und $L_1', \dots, L_n'$ die Literale, für die

$$\begin{aligned} \{L_1, \dots, L_m\} &= \{M \in K_1 \mid M\Theta_1 = \overline{L}\}, \\ \{L_1', \dots, L_n'\} &= \{M \in K_2 \mid M\Theta_2 = L\}. \end{aligned}$$

- Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{L_i}\Theta = \overline{L_i}\Theta_1 &= L && \text{für } 1 \leqslant i \leqslant m, \\ L_i'\Theta = L_i'\Theta_2 &= L && \text{für } 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

  Also ist Θ Unifikator von

$$\{\overline{L_1}, \dots, \overline{L_m}, L_1', \dots, L_n'\}.$$

Es sei Θ' ein allgemeinster Unifikator dieser Menge. Dann gibt es eine Substitution $\tilde{\Theta}$ mit $\Theta = \Theta'\tilde{\Theta}$.

- Definiere

$$R = \big((K_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\})\big)\Theta'.$$

  Dann ist R Resolvente von K_1 und K_2. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} R\tilde{\Theta} &= \big((K_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\})\big)\Theta'\tilde{\Theta} \\ &= \big((K_1 \setminus \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \ldots, L'_n\})\big)\Theta \\ &= K'_1 \setminus \{\overline{L}\} \;\cup\; K'_2 \setminus \{L\} \\ &= R'. \end{aligned}$$

- Damit ist R' Grundinstanz von R.

□