Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 0, 2017-04-09

Allgemeine Hinweise

- Bitte melden Sie sich in der ersten Semesterwoche ab Donnerstag, 2017-04-06, unverbindlich für eine Übungsgruppe an, indem Sie sich in die gegenüber von Raum IZ 343 (Informatikzentrum, 3. Stock) ausgehängten Listen eintragen.
- Künftig ist geplant ein neues Aufgabenblatt spätestens jeden Dienstag auf der Webseite zur Vorlesung bereitzustellen (http://www.iti.cs.tu-bs.de/~koslowj/Logik). Die Abgabe sollte für alle Gruppen außer der ersten Dienstagsgruppe in den gekennzeichneten Fächern des Kastens neben IZ 343 erfolgen! Dadurch wird effektiv der erste Übungstermin der Montagsgruppen um eine Woche nach vorne gezogen (2017/04/10 anstatt Ostermontag). Wir überlegen noch, wie mit dem 1. May verfahren werden soll, evtl. können die Montaggruppen auf den 28. April vorgezogen werden.
- Die Hausaufgaben sind in **Zweiergruppen** zu bearbeiten. Beide Personen sollten dieselbe Übungsgruppe besuchen. Schreiben Sie stets beide Namen und Matrikelnummern sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf die abgegebenen Lösungen. Eine geforderte Studienleistung für Studierende der Informatik besteht darin, 50% der Hausaufgabenpunkte zu erreichen.
- Bemühen Sie sich um eine formal korrekte Darstellung Ihrer Lösungen. Orientieren Sie sich dafür an der Sprache und Notation der Vorlesung/Übung.
- All Ihre Behauptungen sollen (kurz und prägnant!) begründet werden.
- Mangels Vorlesungsstoff ist das 0. Blatt zwangsläufig informell und zum Aufwärmen gedacht.

Übungsaufgabe 1

Als Verantwortlicher für den Ball der Botschaft ist es Ihre Aufgabe, die Einladungen zu verschicken. Dabei gibt es folgende Einschränkungen:

1. Der Botschafter hat Sie angewiesen, Peru einzuladen oder Qatar auszuschließen;
2. Der stellvertretende Botschafter möchte, dass Sie Qatar oder Rumänien einladen, oder beide;
3. Aufgrund eines kürzlichen diplomatischen Vorfalls können Sie Peru und Rumänien nicht bleichzeitig einladen.

Wen laden Sie ein?

Lösungsvorschlag:

Zunächst übersetzen wir die Bedingungen in symbolishe Formeln, mit der intuitiven Bedeutung der Junktoren $\wedge$ ("und“, Konjunktion), $\vee$ („oder“, Disjunktion), $\neg$ („nicht“, Negation):

1. $P \vee \neg Q$
2. $Q \vee R$

3. $\neg(R \wedge P)$

Anmerkung: Dieser Abstraktionsschritt kann auch bei sehr unübersichtlichen Prosa-Argumenten nützlich sein, vergl. Aufgabe 2.

Natürlich sollen alle drei Bedingungen erfüllt sein, also ist ihre Konjunktion (= und-Verknüpfung) zu betrachten:

$$F = (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg(R \wedge P)$$

Achtung: hier wird eine Konjunktion von drei(!) Formeln gebildet. Eigentlich haben wir $\wedge$ als zweistelligen Junktor eingeführt, insofern müßten wir mit Klammern eine Reihenfolge erzwingen, in der die Konjunktionen anzuwenden sind. Zum Glück stellt sich heraus, dass diese Reihenfolge für den Wahrheitswert der Formel unerheblich ist, wie man auch leicht anhand der entsprechenden Wahrheitstabellen überprüfen kann. Technische gesprochen ist die Konjunktion: *assoziativ*, wie Sie das von der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ von Zahlen gewohnt sind. Allerdings ist nicht jede binäre Operation assoziativ, wie man etwa bei der Subtraktion $-$ von Zahlen sieht.

Als Antwort wünschen wir uns eine Konjunktionen aus drei Komponenten $A \wedge B \wedge C$, wobei A, B und C jeweils dafür steht, dass ein Land eingeladen, bzw. nicht eingeladen wird. Es könnte auch mehrere solche Alternativen geben, die entsprechenden Formeln wären dann mit $\vee$ zu verknüpfen.

Wir betrachten zunächst die Wahrheitstabelle für F:

P	Q	R	$(P \vee \neg Q)$	$(Q \vee R)$	$\neg(R \wedge P)$	F
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0

In der letzten Spalte sthet genau dann eine Eins, wenn in allen drei Vorgängerspalten eine Eins steht. Eine äquivalente Formel ist dann offensichtlich

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$$

Dabei werden in den Zeilen, in denen F den Wert 1 hat, die mit 0 belegten Atome negiert, und die resultierenden Atome bzw. Negationen von Atomen per Konjunktion verknüpft. Die resultierenden Formeln werden dann per Disjunktion (= oder-Verknüpfung) verbunden.

Die spezielle Form dieser Formel, die sog. „disjunktive Normalform"(DNF), wird in der VL besprochen, ebenso ihre noch nützlichere duale Variante, die „konjunktive Normalform"(KNF).

Damit gibt es zwei Möglichkeiten, Einladungen ohne diplomtische Verwicklungen auszusprechen.

Um die oben angesprochene konjunktive Normalform der Formel F direkt aus der Wahrheitstabelle entnehmen zu können, muß man etwas mehr arbeiten. Die DNF für $\neg F$ sollte man wie oben aus den Zeilen bestimmen können, in denen bei $\neg F$ eine Eins, also bei F eine Null steht. Wenn man das Ergebnis nochmal negiert, zeigt sich, dass, zumindest in klassischwer Logik, die Negation der DNF für $\neg F$ zu F äquivalent ist. Nun bleibt zu untersuchen, was eine Negation mit einer Konjunktion anstellt, Stichwort: de Mogan'sche Regeln.

Übungsaufgabe 2

Logik im (akademischen) Alltag: Stimmt's, oder habe ich recht?

> Mithilfe empirischer Forschungen zum Gehirn, die mit bildgebenden Verfahren arbeiten, lässt sich das Verhalten von Menschen analysieren und vorausberechnen. Weil wir also die neuen Techniken des MRT und des fMRT haben und hochauflösende Bilder von Gehirnaktivitäten auswerten können, zeigt sich, dass nicht der angenommene freie Wille, sondern das Gehirn selbst die Menschen und ihr Verhalten steuert.

Lösungsvorschlag:

Prämisse: Mit bildgebenden Verfahren läßt sich das Verhalten von Menschen vorausberechnen.

Schlußfolgerung: beginnt mit „weil", wiederholt dann aber nur die Prämisse: Zirkelschluß! Vergl.

`https://home.uni-leipzig.de/schreibportal/zirkularitaet/`

Übungsaufgabe 3

Bereits die Griechen kannten logische Regeln; diese wurden schon Kindern neben Rhetorik und Grammatik im Rahmen des „trivium" beigebracht. Die logischen Regeln trugen Namen, am bekanntesten sind die „Syllogismen", etwa

Voraussetzung: Alle Katzen verfügen über ein Fell.
Voraussetzung: Manche Haustiere sind Katzen.
Schlußfolgerung Manche Haustiere haben ein Fell.

Formalisieren Sie den obigen Syllogismus, indem sie von Katzen, Fell und Haustieren abstrahieren.

Lösungsvorschlag:

Wir machen zunächst die Quantifizierung explizit:

Voraussetzung: Für alle Katzen gilt: sie haben Fell.
Voraussetzung: Es gibt Haustiere, die Katzen sind.
Schlußfolgerung Es gibt Haustiere, die Fell haben.

Nun formulieren wir die Aussagen für beliebige Objekte des Universums, oder für beliebige Tiere:

Voraussetzung: Für alle Objekte/Tiere x gilt: falls x eine Katze ist, dann besitzt x ein Fell.
Voraussetzung: Es gibt ein Objekt/Tier y, das ein Haustier und eine Katze ist.
Schlußfolgerung Es gibt ein Objekt/Tier y, das ein Haustier ist und Fell besitzt.

Nun abstrahieren wir von Katzen, Fell und Haustieren:

Voraussetzung: Für alle x: falls $K(x)$, dann $F(x)$.
Voraussetzung: Es gibt y mit $H(y)$ und $K(y)$.
Schlußfolgerung Es gibt y mit $H(y)$ und $F(y)$.

Schließlich könnte man noch logische Symbole für „für alle" und „es gibt" einführen, die sog. Quantoren

Voraussetzung: $\forall x : K(x) \Rightarrow F(x)$
Voraussetzung: $\exists y : H(y) \wedge K(y)$
Schlußfolgerung $\exists y : H(y) \wedge F(y)$

Wir bewegen uns hier auf dem Gebiet der Prädikatenlogik, die das letzte Drittel der VL einnehmen wird.

Aufgabe 4 [5 PUNKTE]

Wir verwenden folgende Abkürzungen:

- B: die Batterie ist aufgeladen;
- L: die Lampe ist eingeschaltet;
- a: Der Schalter steht auf „ein".

Ein sehr simples Schaltkreismodell könnte sein: $M: \quad L \Leftrightarrow (a \wedge B)$.

[5 PUNKTE] Gilt auch $M \Rightarrow (\neg a \Rightarrow \neg L)$?

[Hinweis: eine Implikation ($\Rightarrow$) ist wahr, wenn der Wahrheitswert der linken Seite kleiner oder gleich dem Wahrheitswert auf der rechten Seite ist; bei einer Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) müssen die Wahrheitswerte auf beiden Seiten gleich sein.]

Aufgabe 5 [6 PUNKTE]

Wir betrachten zwei Schlußfolgerungen:

> Wenn der Zug Verspätung hat, und keine Taxis am Bahnhof stehen, dann verspätet sich Paul bei seiner Verabredung. Paul verspätet sich nicht, aber der Zug hatte Verspätung. *Daher* gab es Taxis am Bahnhof.

sowie

> Wenn es regnet und Carla keinen Schirm dabei hat, wird sie naß. Carla is nicht naß, aber es regnet. *Daher* hat Carla ihren Schirm dabei.

Beide Behauptungen scheinen intuitiv korrekt zu sein. Zeigen Sie, dass beide Schlußfolgerungen auch dieselbe Struktur haben, indem sie diese abstrahieren.

Aufgabe 6 [6 PUNKTE]

Wie steht es mit der Gültigkeit der folgenden englischen Syllogismen?

(a) [3 PUNKTE]

Voraussetzung: All humans must die.
Voraussetzung: Archilles is human.
Schlußfolgerung So Archilles must die.

(b) [3 PUNKTE] (von Raymond Smullyan)

Voraussetzung: Some cars rattle.
Voraussetzung: My car is some car.
Schlußfolgerung My car rattles.

Sollte er nicht gültig sein, wo ist das Problem?

Aufgabe 7 [0 PUNKTE]

Überzeugen Sie sich selbst vom beklagenswerten Zustand der Logik im Mittelalter, speziell hinsichtlich der Identifizierung von Hexen, in folgendem halbdokumentarischen Film:

`https://www.youtube.com/watch?v=k3jt5ibfRzw`

Versuchen Sie, das Argument von Bedevere zu formalisieren. Im Laufe der Vorlesung sollten einige Fehler deutlich werden (kein Problem, wenn Sie die jetzt noch nicht finden).

Abgabe bis Montag, 2017-04-18, 13:15, im Kasten neben IZ 343