Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 1, 2017-04-18

Übungsaufgabe 8

Definition. Eine Menge B heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung $B \longrightarrow I\!N$ gibt. Anderfalls heißt sie *überabzählbar*.

Zeigen oder widerlegen Sie: B ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $I\!N \longrightarrow B$ gibt. Reparieren Sie ggf. diese Charakterisierung der Abzählberkeit.

Lösungsvorschlag:

Ist B abzählbar, so gibt es eine injektive Abbildung $B \xrightarrow{f} I\!N$. Die Umkehrung f^{op} von f ist i.A. nur eine partielle Abbildung von $I\!N$ nach B, da f nicht notwendig surjektiv sein muß, etwa wenn B endlich ist. Um f^{op} garantiert zu einer totalen Abbildung erweitern zu können, brauchen wir ein Element $b_0 \in B$, auf das wir jedes $n \in I\!N$ ohne f-Urbild abbilden können. Aber das erfordert $B \neq \emptyset$.

Für $B = \emptyset$ funktioniert dieses Argument nicht, es gibt gar keine Abbildung von $I\!N$ nach $\emptyset$. Aber natürlich ist $\emptyset$ als endliche Menge auch abzählbar.

Mögliche Reparaturen: B ist genau dann abzählbar, wenn

- B leer ist oder eine surjektive Abbildung $I\!N \xrightarrow{g} B$ existiert. Im Fall $B \neq \emptyset$ wähle zu jedem $b \in B$ ein g-Urbild; das liefert eine injektive Abbildung von B nach $I\!N$.
- eine partielle surjektive Abbildung $I\!N \xrightarrow{h} B$ existiert. Der Fall dass B leer sein könnte, wird durch die Partialität abgedeckt: im Gegesatz zu totalen Abbildungen von $I\!N$ nach $\emptyset$ gibt es durchaus eine partielle Abbildung, und zwar genau eine, und deren Definitionsbereich ist leer.

Übungsaufgabe 9

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:

(a) Das Alphabet der Aussagenlogik.

(b) Die Menge der Formeln der Aussagenlogik.

Lösungsvorschlag:

(a) Das Alphabet $\mathcal{S}$ besteht aus der Vereinigung der abzählbaren Menge der atomaren Aussagen mit der endlichen Menge der Junktoren und der zwei-elementigen Menge der Klammern und ist folglich abzählbar.

(b) Da wir Formel als 2-dimensionale Bäume und nicht als 1-dimensionale Wörter definiert haben, verwenden wir einen Trick: Da jeder Formel eindeutig eine Infix- (oder auch Postfix-)Darstellung zugeordnet werden kann, wir also eine injektive Abbildung von der Menge der Formeln in die Menge $\mathcal{D}$ dieser Darstellungen haben, genügt es, die Abzählbarkeit der Menge der Formel-Darstellungen zu zeigen.

Formeldarstellungen sind aber endliche Tupel ocer Wörter über dem abzählbaren Alphabet

$$S = \mathcal{P} + \{\bot, \neg, \wedge\vee\} + \{(,)\}$$

Nun ist die Menge

$$\mathcal{S}^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^i = \mathcal{S}^0 + \mathcal{S} + \mathcal{S}^2 + \mathcal{S}^3 + \dots$$

aller endlichen Tupel oder Wörter über $\mathcal{S}$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar. (Die Verwendung des Summenzeichens deutet darauf hin, dass es sich bei dieser Vereinigung um eine disjunkte Vereinigung handelt; je zwei der zu vereinigenden Mengen haben einen leeren Durchschnitt.)

Damit ist $\mathcal{D}$ als Teilmenge von s^* abzählbar, und somit auch $\mathcal{F}$.

Anmerkung: $\mathcal{S}^0$ einelementig, das einzige 0-Tupel wird häufig mit ε bezeichnet und *leeres Wort* genannt; es stimmt mit der einzigen Abbildung von $\emptyset$ nach S überein, der Inklusionsabbildung $\emptyset \xrightarrow{i} S$.

Aufgabe 10 [9 PUNKTE]

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:

(a) [4 PUNKTE] Die Menge der totalen Variablenbelegungen, d.h., der Funktionen von der Menge der atomaren Aussagen in die Menge der Wahrheitswerte $2 = \{0, 1\}$.

(b) [5 PUNKTE] Die Menge der endlichen Mengen von Variablen.

Aufgabe 11 [10 PUNKTE]

(a) Definieren Sie die *Tiefe* $\tau(F)$ einer (syntaktisch korrekten) Formel F mittels struktureller Rekursion.

(b) Setzen Sie die Anzahl der Knoten und der Kanten einer Formel F (als Baum) mit der Länge $\|F\|$ ihrer Infix-Darstellung in Beziehung und beweisen Sie Ihr Ergebnis mittels struktureller Induktion.

Aufgabe 12 [10 PUNKTE]

Definieren Sie die formale Semantik einer erweiterten Aussagenlogik, bei der Atome neben den Wahrheitswerten 1 („wahr“) und 0 („falsch“) auch den Wahrheitswert 0.5 („vielleicht“) annehmen können.

Aufgabe 13 [15 PUNKTE]

Donald Duck hat seine Neffen Tick, Trick und Track zu Besuch. Da Tick am nächsten Tag Geburtstag hat, backt Donald eine Torte und stellt sie in den Kühlschrank. Doch am nächsten Morgen findet er dort zu seinem Schrecken nur noch ein paar Krümel eines nächtlichen Schmauses vor. Da es wie üblich keiner der Neffen gewesen sein will, überlegt sich Donald folgendes:

1. Da er die Haustür abgeschlossen hatte, konnte niemand außer Tick, Trick und Track von der Torte gegessen haben.
2. Track traut sich nur so etwas anzustellen, falls auch Tick mitmacht.
3. Trick ist zu klein um an den Kühlschrank heran zu kommen und ihn zu öffnen.

Hat das Geburtstagskind von der Torte gegessen?

Bitte geben Sie eine begründete Antwort! [Hinweise: Gehen Sie davon aus, dass Tick als jüngster der Drillinge einen Tag später aus dem Ei geschlüpft ist, als seine Brüder. Formalisieren Sie die Prosa-Aussagen und analysieren Sie eine geeignete Wahrheitstafel.]

Abgabe bis Montag, 2017-04-25, 13:15, im Kasten neben IZ 343