



Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 6, 2017-05-30

Wir listen zunächst alle 12 Regeln der natürlichen Deduktion auf; diese werden in den Vorlesungen am 24. und 31. Mai behandelt. Die Regeln erscheinen zunächst in Baumform und dann in linearer Form:

	Introduktion	Elimination
Konjunktion	$\frac{G \quad H}{G \wedge H}$ $G, H \vdash G \wedge H$	$\frac{G \wedge H}{G} \quad \text{sowie} \quad \frac{G \wedge H}{H}$ $G \wedge H \vdash G, G \wedge H \vdash H$
Implikation	$\frac{\begin{array}{c} [G] \\ \vdots \\ H \end{array}}{G \Rightarrow H}$ $[G] \dots H \vdash G \Rightarrow H$	$\frac{G \quad G \Rightarrow H}{H}$ $G, G \Rightarrow H \vdash H$
Disjunktion	$\frac{G}{G \vee H} \quad \text{sowie} \quad \frac{H}{G \vee H}$ $G \vdash G \vee H, H \vdash G \vee H$	$\frac{\begin{array}{c} [G] \quad [H] \\ \vdots \quad \vdots \\ G \vee H \quad K \quad K \end{array}}{K}$ $G \vee H, [G] \dots K, [H] \dots K \vdash K$
Negation	$\frac{\begin{array}{c} [G] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg G}$ $[G] \dots \perp \vdash \neg G$	$\frac{G \quad \neg G}{\perp} \quad \text{und} \quad \frac{\neg \neg G}{G} \quad \text{und} \quad \frac{\perp}{G}$ $G, \neg G \vdash \perp, \neg \neg G \vdash G, \perp \vdash G$

Übungsaufgabe 35

Verwenden Sie die Resolutionsmethode, um

- (a) [4 PUNKTE] die Erfüllbarkeit von $F = ((M \Rightarrow A) \vee (\neg T \wedge H)) \wedge (M \vee A) \wedge (\neg(T \Rightarrow H) \vee A)$ zu analysieren,
- (b) [4 PUNKTE] festzustellen, dass $G = (A \Rightarrow B) \vee (A \wedge \neg(B \vee C)) \vee (A \wedge C)$ eine Tautologie ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Eliminieren der Implikationen liefert

$$(\neg M \vee A \vee (\neg T \wedge H)) \wedge (M \vee A) \wedge (\neg(\neg T \vee H) \vee A)$$

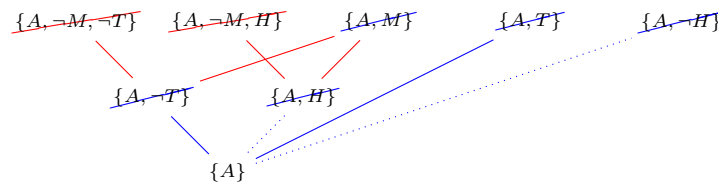
Daraus ergibt sich zunächst die NNF

$$(\neg M \vee A \vee (\neg T \wedge H)) \wedge (M \vee A) \wedge ((T \wedge \neg H) \vee A)$$

und mittels Distributivgesetz die KNF:

$$(\neg M \vee A \vee \neg T) \wedge (\neg M \vee A \vee H) \wedge (M \vee A) \wedge (T \vee A) \wedge (\neg H \vee A)$$

Wir gehen zur Mengenschreibweise über und konstruieren mit dem praktikablen Algorithmus einen Resolventengraphen in der (zufälligen) Reihenfolge M, T :



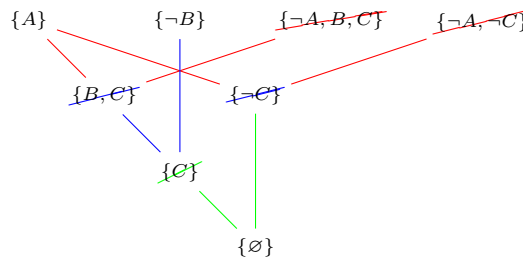
was recht schnell terminiert, ohne dass \emptyset erscheint.

(b) Gemäß Satz 2.6.2 ist $\neg G$ genau dann nicht erfüllbar, wenn G eine Tautologie ist.

Die NNF von $\neg G$ ergibt sich zu

$$A \wedge \neg B \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C)$$

was erfreulicherweise bereits eine KNF ist. In der Zufallsreihenfolge A, B und C erhalten wir den Graphen



Dies zeigt, dass die untersuchte Formel $\neg G$ nicht erfüllbar, die Ursprungsformel G also eine Tautologie ist.

Übungsaufgabe 36

Bearbeiten Sie Aufgabe 18 von Blatt 2 mit natürlicher Deduktion in Tabellenform. Zur Erinnerung:

Donald Duck will seine Neffen Tick, Trick und Track zum Bierholen in den Supermarkt schicken. Das stößt allerdings auf wenig Begeisterung:

Tick: Ich habe keine Zeit, ich muss Hausaufgaben machen.

Trick: Ich will nicht allein gehen.

Track: Ich gehe nur, wenn auch Tick mitkommt.

Zeigen Sie, dass Donald heute nüchtern bleibt.

Lösungsvorschlag:

Atomare Aussagen: A : Tick geht mit, B : Trick geht mit, C : Track geht mit.

Aussagen der Neffen: Tick $\neg A$; Trick: $B \Rightarrow (A \vee C)$; Track: $C \Rightarrow A$

Herzuleiten ist die Konjunktion $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ mit diesen Prämissen.

Achtung: Da es sich um syntaktische Herleitungen handelt, dürfen wir keine semantischen Argumente einbeziehen, also etwa bekannte Tautologien oder die Definition von \Rightarrow mittels \vee und \neg verwenden. Erlaubt ist nur die Wiederverwendung früher gezeigter syntaktischer Herleitungen (wie im Skript gezeigt).

1	$\neg A$	Praemisse
2	$B \Rightarrow (A \vee B)$	Praemisse
3	$C \Rightarrow A$	Praemisse
4	C	Kastenpraemisse
5	A	$(\Rightarrow e)$, 3, 4
6	\perp	$(\neg e)$, 1, 5
7	$\neg C$	$(\neg i)$, 4 – 6
8	B	Kastenpraemisse
9	$A \vee C$	$(\Rightarrow e)$, 2, 8
10	A	Kastenpraemisse
11	C	Kastenpraemisse
12	A	$(\Rightarrow e)$, 3, 11
13	A	$(\vee e)$, 9, 10 – 10, 11 – 12
14	\perp	$(\neg e)$, 1, 13
15	$\neg B$	$(\neg i)$, 8 – 14
16	$\neg A \wedge \neg B$	$(\wedge i)$, 11, 15
17	$(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C$	$(\wedge i)$, 7, 16

Aufgabe 37 [14 PUNKTE]

Die Formel F sei die Konjunktion folgender Teilformeln

0. $T \vee \neg E \vee D$
1. $\neg T \vee C$
2. $(E \wedge \neg G) \vee \neg D \vee G$
3. $T \vee C \vee \neg D \vee G$
4. $\neg C$
5. $\neg I \vee \neg G$

Verwenden Sie die Resolutionsmethode, um daraus $\neg I \vee \neg E$ zu folgern.

Aufgabe 38 [28 PUNKTE]

Untersuchen Sie die folgenden syntaktischen Sequenzen auf Gültigkeit. Genauer: Finden Sie für die gültigen Sequenzen einen formalen Beweis mittels natürlicher Deduktion in linearer Form mit Kästen.

- (a) [4 PUNKTE] $F \vdash F \wedge (F \vee G) \wedge (F \vee (F \wedge G))$
- (b) [4 PUNKTE] $F, F \vee G \vdash F \wedge G$
- (c) [6 PUNKTE] $\neg(F \Rightarrow G) \Rightarrow H, F \wedge \neg H \vdash G$
- (d) [10 PUNKT0] $(F \Rightarrow G) \Rightarrow G \vdash (G \Rightarrow F) \Rightarrow F$

(e) [4 PUNKTE] $F \vee (G \wedge H) \vdash F \wedge (G \vee H)$

Bei nicht gültigen Sequenzen können Sie die Korrektheit des Kalküls der natürlichen Deduktion verwenden (was bedeutet das?).

(Dieser Typ Aufgabe ist klausurrelevant. Abschreiben von Lösungen bereitet Sie hier noch weniger auf die Klausur vor als sonst.)

Aufgabe 39 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe von natürlicher Deduktion

$$A \vee (\neg\neg B \Rightarrow A), B \vdash \neg\neg A$$

Anmerkung: Der Beweis soll vollständig sein und ausschließlich die in der Vorlesung eingeführten Deduktionsregeln verwenden. Wenn Sie eine korrekte Herleitung mit $n < 14$ Zeilen finden, erhalten Sie $14 - n$ Sonderpunkte.