Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 7, 2017-06-12

Für eine bestimmte eingeschränkte Klasse von Formeln in KNF ist die Resolutionsmethode doch effizient. Dabei handelt es sich um die sog. **Hornformeln**, in denen jede Klausel höchstens ein positives Literal und kein Literal doppelt enthält. Bei den Klauseln unterscheidet man:

- **Regeln** (**definite clauses** in Englisch) mit genau einem positiven Literal, die somit zu Implikationen äquivalent sind, etwa

  $$\neg A_0 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_{n-1} \vee B \equiv A_0 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \Rightarrow B$$

  im Falle einer leeren Konjunktion spricht man auch von **Tatsachen**.

- **Frageklauseln** ohne positives Literal, die folglich zur Negation einer Co-Klausel äquivalent sind, etwa

  $$\neg A_0 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_{n-1} \equiv \neg(A_0 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \equiv A_0 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \Rightarrow \bot$$

  Die zugrundeliegende Frage bezieht sich auf die Gültigkeit dieser Co-Klausel $A_0 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}$. Sie ist gültig, wenn die Hornformel mit der Negation dieser Co-Klausel *nicht* erfüllbar ist.

Für Hornformeln vereinfacht sich die Resolutionsmethode zur sog. **SLD-Sesolution**. Hierbei kann man sich auf Resolutionsgraphen beschränken, die mit einer Frage und einer Regel beginnen, folglich als Resolvente eine Frage oder $\varnothing$ erzeugen, und einen Baum als Graphen liefern.

Alternativ verwendet man den **Markierungsalgorithmus**: Wir denken uns zunächst alle vorkommenden Variablen mit 0 belegt. Wird F auf diese Weise nicht 1 zugewiesen, so versuchen wir, diese Belegung rekursiv geschickt abzuwandeln, um dadurch mehr Klauseln auf 1 abzubilden. Für die nunmehr auf 1 abgebildeten Variablen markieren wir alle Vorkommen in F, daher der Name.

(M0) Markiere jedes Vorkommen jeder Tatsache A; diese formen $\mathcal{N}_0$, und solange noch Tatsachen in $\mathcal{N}_i$ vorkommen, wählen wir Variablen daraus;

(M1) (Rekursiv) Sobald in einer Regel $\neg A_0 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_{n-1} \vee B$, die Variablen aller negativen Literale markiert sind, markiere jedes Vorkommen der Variable B. Falls keine neuen Variablen markiert werden können, gehe zu Schritt (M2).

(M2) Besteht mindestens eine Frage nur aus Literalen mit markierten Variablen, erfolgt die Ausgabe „F unerfüllbar“, andernfalls „F erfüllbar“.

Übungsaufgabe 40

Verwenden Sie sowohl SLD-Resolution als auch den Markierungsalgorithmus um die folgenden Formel auf Erfüllbarkeit zu prüfen. Geben Sie im positiven Fall eine Belegung an, die der Formel den Wert 1 zuweist.

$$(Q \vee \neg S) \wedge R \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (S \vee \neg R)$$

Lösungsvorschlag:

Markierungsalgorithmus: es gibt nur eine Tatsache, R.

(M0)

$$(Q \vee \neg S) \wedge R \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (S \vee \neg R)$$

(M1) iterativ:

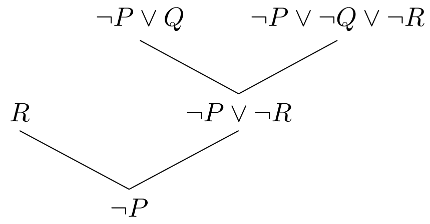
$$(Q \vee \neg S) \wedge R \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (S \vee \neg R)$$

$$(Q \vee \neg S) \wedge R \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (S \vee \neg R)$$

(M2) Die dritten Klausel ist die einzige Frage ist und nicht alle Atome sind markiert. Damit ist die Formel erfüllbar. Eine erfüllende Belegung α ist gegeben durch

$$\alpha(R) = \alpha(S) = \alpha(Q) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha(P) = 0$$

SLD:



Die Resolvente $\varnothing$ tritt nicht auf, also ist die Frage, ob $P \wedge Q \wedge R$ gilt, mit "Nein" zu beantworten.

Aufgabe 41 [12 PUNKTE]

(a) [6 PUNKTE] Beweisen Sie mittels natürlicher Deduktion die Tautologie $F \vee \neg F$, d.h.,

$$\vdash F \vee \neg F \qquad LEM$$

Der Name "LEM" ist die Abkürzung für "Law of Excluded Middle".

(b) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass die Regel $(\neg\neg e)$ der natürlichen Deduktion durch LEM ersetzt werden kann, ohne die Ausdrucksfähigkeit der natürlichen Deduktion zu verändern.

Aufgabe 42 [14 PUNKTE]

Beweisen Sie die Gültigkeit der Sequenz $C \Rightarrow \neg A \vee \neg B, \neg A \Rightarrow \neg B, B \models \neg C$

(a) [4 PUNKTE] mit einer Wahrheitstabelle.

(b) [6 PUNKTE] mittels natürlicher Deduktion (verwenden Sie $\models\ =\ \vdash$).

(c) [6 PUNKTE] mit dem Markierungsalgorithmus.

(d) [6 PUNKTE] mit einer SLD-Resolution.

Hinweis zu (c) und (d): Formen Sie die Formeln der Sequenz in Hornklauseln um. Beachten Sie außerdem, dass eine Sequenz $\Gamma \models F$ genau dann gültig ist, wenn die Menge $\Gamma \cup \{\neg F\}$ nicht erfüllbar ist.

Abgabe bis Montag, 2017-06-19, 13:15, im Kasten neben IZ 343