Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 8, 2017-06-19

Das **Alphabet** der Prädikatenlogik besteht aus

- ▷ $\mathcal{V}$, einer abzählbar unendlichen Menge von **Variablen** $x_0, x_1, x_2, \ldots$,
- ▷ einer Signatur Σ,
- ▷ dem Gleichungssymbol $\doteq$,
- ▷ den Junktoren $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und je nach Vereinbarung auch $\Rightarrow$, $\top$, $\Leftrightarrow \ldots$
- ▷ den Quantoren $\forall$ und $\exists$
- ▷ und den Hilfssymbolen Klammern „)“ , „(“ , Komma „,“ und Doppelpunkt „:”

Die Menge aller Σ-**Terme** ist die kleinste Menge aller geordneten Bäume, die

- ▷ $\mathcal{V}$ umfaßt, d.h., jede Variable $x_0, x_1, x_2 \ldots$ ist ein Term;
- ▷ mit jedem n-stelliges Funktionssymbol f und n Termen t_i, $i < n$, auch den Baum $f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ mit Wurzel f enthält. (Im Fall $n = 0$ erhält man so die Konstanten.)

Die Menge aller Σ-Terme, deren Variablen in $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ liegen bezeichnet man mit $\mathcal{T}_\Sigma(\mathcal{M})$.

- ▷ **Atomare Formeln** haben die Form

$$t_0 \doteq t_1 \qquad \text{sowie} \qquad R(t_0, \ldots, t_{n-1})$$

  wobei die t_i Terme sind und R ein n-stelliges Prädikatssymbol aus Σ ist.

- ▷ Die **Formeln** der Prädikatenlogik bilden die kleinste Menge geordneter Bäume,
  1. die jede atomare Formel enthält,
  2. bezüglich der Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ abgeschlossen ist,
  3. mit jeder Formel F und jeder Variable x auch $(\forall x : F)$ und $(\exists x : F)$ enthält.

Übungsaufgabe 43

Die Signatur Σ enthalte drei Funktionssymbole g, f, c mit den Stelligkeiten 3, 1 bzw. 0, und zwei Relationssymbole R, S jeweils mit Stelligkeit 2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke korrekt gebildete Infix-Darstellungen prädikatenlogischer Terme oder Formeln dieser Signatur sind (x, y, z seien Variablen). Falls ein Term vorliegt, zeichnen Sie den Baum; falls weder ein Term noch eine Formel vorliegt, begründen Sie dies.

(a) $f(f(c))$

(b) $R(R(c, x), y)$

(c) $g(f(g(x, f(y), z)), z, f(c))$

(d) $R(x, y) \Rightarrow (\exists z : S(z, y))$

(e) $\forall x : \exists y : (R(c, f(x, c)) \wedge ((\forall z : S(c, c)) \vee R(g(h(x), c, c), z)))$

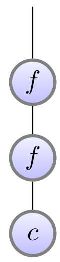
(f) $x \doteq g(x, x, f(x)) \vee \exists c : f(x) \doteq c$

(g) $\exists x : \forall y : R(x, y) \vee S(y, g(c, c, x))f(x) \doteq g(x, z, f(y))$

Lösungsvorschlag:

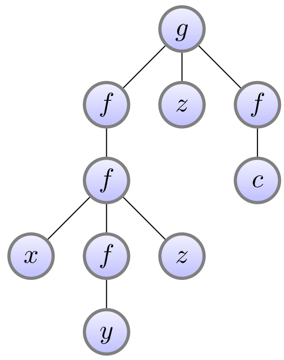
Vorüberlegung: Sobald Relationssymbole oder die Gleichheit auftreten, kann es sich nicht mehr um Terme handeln.

(a) Term

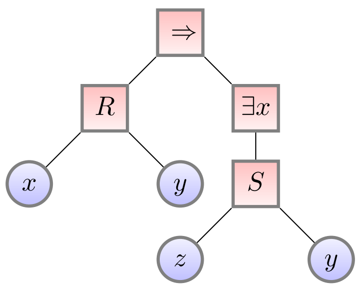


(b) $R(R(c, x), y)$ ist weder ein Term (da Relationssymbole auftreten), noch eine atomare Formel, da das erste Argument des äußeren Relationssymbols R kein Term ist.

(c) Term



(d) Formel:



(e) keine Formel; in der ersten Instanz von R hat das zweite Argument f zwei Argumente statt nur eins.

(f) Da die Signatur eine Konstante c beinhaltet, dürfen wir keine Variable mit c benennen, insofern handelt es sich bei $\exists c$: nicht um einen zulässigen Junktor und der Ausdruck ist keine korrekte Formel. (Bei einer Signatur ohne Konstante c wäre dieser Teil des Ausdrucks aber eine korrekte Formel.)

(g) keine Formel; die Konkatenation von $S(y, g(c, c, x))$ und $f(x)$ ist nicht definiert.

Aufgabe 44 [10 PUNKTE]

Gegeben sei die DNF $F := \neg D \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee (D \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)$.

(a) [6 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus, dass F eine Tautologie ist.

(b) [4 PUNKTE] Welche Eigenschaft muss eine DNF haben, damit man mit der Methode aus Teil (a) entscheiden kann, ob sie eine Tautologie ist?

Aufgabe 45 [12 PUNKTE]

Weisen Sie $(A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow A)$ als Tautologie nach:

(a) [4 PUNKTE] mittels Wahrheitstafel;

(b) [8 PUNKTE] mittels natürlicher Deduktion, indem Sie $\neg(A \Rightarrow B) \vdash C \Rightarrow A$ betrachten;

(c) [3 PUNKTE] mittels semantischer Überlegungen, indem Sie die Folgerelation $\neg(A \Rightarrow B) \models C \Rightarrow A$ betrachten;

(d) [3 PUNKTE] mittels semantischer Umformungen.

Aufgabe 46 [18 PUNKTE]

[6 PUNKTE] Die Signatur Σ enthalte eine Konstante c, ein einstelliges Funktionssymbol f, ein dreistelliges Funktionssymbol g und zwei 2-stellige Prädikatssymbole R und S. Welcher der folgenden Ausdrücke

1. $\forall x \,:\, \exists y \,:\, R(z, f(x)) \wedge \forall z : (S(c, c) \vee R(g(f(x), z, y), z))$
2. $\exists x \,:\, \forall y \,:\, (R(x, y) \Rightarrow S(y, g(c, c, y)) \wedge f(x) \doteq g(x, z, f(y)))$

ist eine korrekte prädikatenlogische Formel für die gegebene Signatur? Zeichnen Sie ggf. den Baum und bewerten Sie das Auftreten aller Variablen als gebunden oder ungebunden.