Technische Universität Braunschweig

Institut für Theoretische Informatik

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik, Übungsklausur

2017/07/12

Aufgabe 1 [18 PUNKTE]

Wir betrachten die aussagenlogische Formel $F = (\neg p \wedge q \Rightarrow \neg r) \wedge \neg(\neg q \vee r)$.

(a) [8 PUNKTE] Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf.

(b) [4 PUNKTE] Handelt es sich um eine Tautologie, ist die Formel erfüllbar? Geben Sie eine kurze Begründung.

(c) [6 PUNKTE] Finden Sie eine möglichst kurze äquivalente Formel.

Lösungsvorschlag:

(a)

p	q	r	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q \Rightarrow \neg r$	$\neg(\neg q \vee r)$	F
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

(b) Da die letzte Spalte Einsen wie Nullen enthält, handelt es sich bei F weder um eine unerfüllbare Formel, noch um eine Tautologie.

(c) Wie die obige Tabelle zeigt, stimmen die Belegungen aus Zeile 2 und 6, die F wahr machen, in q und r überein, wohingegen der Wert von p irrelevant ist. Wir erhalten

$$\mathsf{DNF}(F) = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \equiv q \wedge \neg r$$

Aufgabe 2 [15 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe von natürlicher Deduktion

$$\vdash (P \vee \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

Anmerkung: Der Beweis soll vollständig sein und ausschließlich die in der Vorlesung eingeführten Deduktionsregeln verwenden (nicht die aus dem Programm).

Lösungsvorschlag:

1	$P \vee \neg Q$	Kastenpraemisse
2	$P \Rightarrow R$	Kastenpraemisse
3	Q	Kastenpraemisse
4	$\neg Q$	Kastenpraemisse
5	$\bot$	$(\bot\, i), 3, 4$
6	P	$(\bot\, e), 5$
7	P	Kastenpraemisse
8	P	$(\vee\, e), 1, 4-6, 7$
9	R	$(\Rightarrow e), 2, 8$
10	$Q \Rightarrow R$	$(\Rightarrow i), 3-9$
11	$(P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(\Rightarrow i), 2-10$
12	$(P \vee \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$	$(\Rightarrow i), 1-11$

Zur Strategie: die gewünsche Schlußfolgerung sollte mittels $(\Rightarrow i)$ erhalten werden. Das legt die erste und letzte Zeile des äußeren Kastens fest. Analoges gilt dann auch für die Zeilen 11 und 10. Weiterhin sollte $(\Rightarrow e)$ mit Zeile 2 verwendet werden, um R in Zeile 9 zu erhalten, mit Hilfe von Q in Zeile 8. Damit sind nur noch die Zeilen 4 bis 7 offen (da die Zeilennummern erst nachträglich eingefügt wurden, weiß man zunächst natülich nicht, weiviele Zeilen in der Mitte noch fehlen). Da es sich bei der ersten KP aber um eine Disjunktion handelt, kommt $(\vee\, e)$ als mögliche Regel in Frage.

Aufgabe 3 [17 PUNKTE]

Bei der *vereinfachten Resolutionsmethode* sind alle Resolventen sofort(!) zu entfernen, die bereits vorhandene Resolventen umfassen bzw. als Teilmenge enthalten. (Das schließt die Klauseln der Ausgangsformel ein.) Das Verfahren endet, wenn keine neuen Resolventen mehr gebildet werden können.

Untersuchen Sie mit Hilfe dieser vereinfachten Resolutionsmethode die Erfüllbarkeit der folgenden Formelmenge

$$\neg A \vee G \vee R \quad , \quad \neg G \vee R \vee Z \quad , \quad G \vee \neg R \quad , \quad \neg G \vee \neg Z \quad , \quad \neg R \vee Z$$

sofern

(a) [7 PUNKTE] R

(b) [10 PUNKT0] Z

hinzugefügt wird.

Lösungsvorschlag:

(a) Hinzufügen von R erlaubt das Streichen der ersten beiden Resolventen, übrig bleiben

$$G \vee \neg R \quad , \quad \neg G \vee \neg Z \quad , \quad \neg R \vee Z \quad , \quad R$$

Daraus gewinnen wir als neue Resolvente zunächst $\neg G \vee \neg R$ und dann $\neg R$, was weites Streichen erlaubt:

$$\neg R \quad , \quad \neg G \vee \neg Z \quad , \quad R$$

Zu guter letzt erhalten wir die Resolvente $\emptyset$, die damit als einzige übrigbleibt. Nicht erfüllbar.

(b) Hinzufügen von Z erlaubt auch das Streichen von zwei Resolventen, übrig bleiben

$$\neg A \vee G \vee R \quad , \quad G \vee \neg R \quad , \quad \neg G \vee \neg Z \quad , \quad Z$$

Daraus gewinnen wir die neue Resolvente $\neg G$, was zur Streichung von $\neg G \vee \neg Z$ führt, und dann $\neg R$, was zur Streichung von $G \vee \neg R$ führt:

$$\neg A \vee G \vee R \quad , \quad \neg R \quad , \quad \neg G \quad , \quad Z$$

Schließlich erhalten wir $\neg A \vee G$, was zur Streichung von $\neg A \vee G \vee R$ führt, und dann $\neg A$, was zur Streichung von $\neg A \vee G$ führt. Übrig bleiben

$$\neg A \quad , \quad \neg G \quad , \quad \neg R \quad , \quad Z$$

was keine weiteren Resolventen zuläßt. Erfüllbar.

Aufgabe 4 [13 PUNKTE]

(a) [4 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$ eine KNF für $B \vee (A \wedge C)$ ist.

(b) [2 PUNKTE] Wie nennt man die besondere Form der KNF in Teil (a), und wodurch ist sie charakterisiert?

(c) [4 PUNKTE] Zeichnen Sie die entsprechenden Syntaxbäume.

(d) [3 PUNKTE] Welche Tiefe kann der Syntaxbaum einer derartigen KNF haben, wenn n Variablen vorkommen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

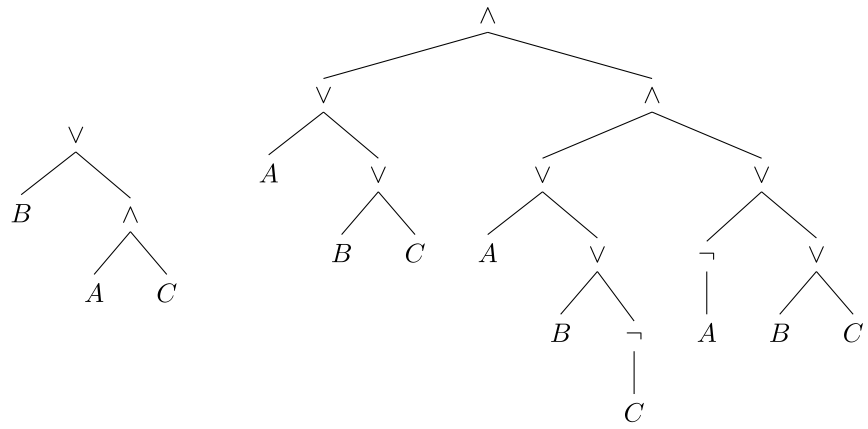
(a) "Ausmultiplizieren" liefert eine KNF $(B \vee A) \wedge (B \vee C)$, dann sortieren wir die Variablen alphabetisch und erhalten $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$. Um jede Variable in jeder Klausel wiederzufinden, formen wir die Disjunktion der ersten Klausel mit $\top \equiv (C \vee \neg C)$ von rechts, und der zweiten Klausel mit $\top \equiv (A \vee \neg A)$ von links und erhalten

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee B\ C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

Entfernen der doppelt auftretenden Klausel $A \vee B\ C$ liefert die oben angegebenen Formel.

(b) Kanonische KNF. In jeder Klausel tritt jede Variable genau einmal auf, positiv oder negativ, und keine zwei Klauseln sind äquivalent.

(c) Zur Erinnerung: alle aussagenlogischen Junktoren sind entweder nullär ($\top$, $\bot$), unär ($\neg$) oder binär ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$). Sind keine Klammern angegeben, müssen wir eine Reihenfolge *wählen*.



(d) Die Tiefe eines Baumes mit Wurzel ist die maximale Länge eines Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.

Eine Klausel der Länge n enthält $n-1$ Disjunktionen und maximal n Negationen. Der Syntaxbaum hat dann maximal die Tiefe $n-1$ oder n, je nachdem ob beide Literale in der letzten Disjunktion positiv sind, oder nicht.

Bei n Variablen existieren weiterhin 2^n verschiedene Klauseln. Ihre Konjunktion benötigt $2^n - 1$ Junktoren $\wedge$. Die Länge des Pfades bis zum Beginn der letzten Klausel-Bäume ist also maximal $2^n - 1$, was eine maximale Gesamttiefe von $2^n - 1 + n = 2^n + n - 1$ liefert.

Aufgabe 5 [21 PUNKTE]

Beantworten Sie folgende Wissens- und Verständnisfragen; knappe Antworten genügen:

(a) [6 PUNKTE] Wann nennt man eine Menge J von Junktoren in der Aussagenlogik *adäquat*? Geben Sie (ohne Beweis) alle adäquaten Teilmengen von $\{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ an.

(b) [4 PUNKTE] Wie kann man mit der Resolutionsmethode testen, ob eine aussagenlogische Formel eine Tautologie ist?

(c) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie: für jede prädikatenlogische Formel kann man eine äquivalente Formel finden, die mit dem Symbol $\forall$ beginnt.

(d) [6 PUNKTE] Geben Sie eine allgemeingültige Formel an (mit Begründung), die nicht mehr allgemeingültig ist, wenn man Σ-Strukturen mit leerer Trägermenge erlaubt. Wie kann man Ihre Formel modifizieren, so dass sie auch dann noch allgemeingültig ist, wenn leere Trägermengen zugelassen werden?

Lösungsvorschlag:

(a) Wenn jede $\{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow\}$-Formel zu einer J-Formel äquivalent ist.

Im Fall $J = \{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ ist keine Singleton-Teilmenge adäquat. Wegen der de Morgan'schen Regeln und der Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $B \vee \neg A$ und somit $\neg(\neg B \wedge A)$ sind die zweielementigen Mengen $\{\neg, \wedge\}$ und $\{\neg, \Rightarrow\}$ adäquat, und damit auch all ihre Obermengen in $\{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

Andererseits ist keine Teilmenge von $\{\neg, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ ohne $\neg$ adäquat, da die Negation nicht darstellbar ist.

Zu untersuchen bleibt $\{\neg, \Leftrightarrow\}$. Mit diesen Junktoren aufgebaute Wahrheitstabellen können aufgrund der Symmetrie von $\Leftrightarrow$ nur eine gerade Anzahl von Einsen in der letzten Spalte haben, daher ist diese Menge nicht adäquat.

(b) F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ nicht erfüllbar ist, und dies kann mit der Resolutionsmethode festgestellt werden.

(c) Korrekt: wähle eine neue Variable z, die nicht in F vorkommt, und betrachte $G := \forall z : F$. Dann gilt für jede Σ ¿- Struktur $\mathcal{A}$ mit Träger A und jede Belegung α

$$\widehat{\alpha}(G) = \inf\{\, \widehat{\alpha}(F[a/z] \,:\, a \in A \,\} = \widehat{\alpha}(F)$$

(d) Die Formel $\forall x : F \Rightarrow \exists x \ : F$ ist bekanntlich allgemeingültig, sofern der leere Träger ausgeschlossen ist, denn für jede nichtleere Teilmenge $X \subseteq \mathbf{2}$ von Wahrheitswerten das Infimum immer kleiner gleich dem Supremum.

Erlaubt man dagegen $\varnothing$ als Träger, so haben wir

$$\inf \varnothing = 1 \quad \text{sowie} \quad \sup \varnothing = 0$$

so dass die vorherige Ordnungsbeziehung nicht mehr stimmt.

Zwecks Reparatur muß die Formel um die Forderung ergänzt werden, dass der Träger nicht leer ist, was sich durch

$$\exists x : x = x$$

ausdrücken läßt. Also ist

$$\exists x : x = x \Rightarrow (\forall x : F \Rightarrow \exists x : F)$$

auch bei erlaubten leeren Trägern allgemeingültig. Ohne die Default-Relation der Gleichheit wird dies allerdings schwieriger.

Aufgabe 6 [21 PUNKTE]

Gegeben sei folgende Horn-Formel:

$$(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee u) \wedge (\neg t \vee \neg u)$$

Wenden Sie den Markierungsalgorithmus an um festzustellen, ob die Formel erfüllbar ist. Falls ja, geben sie eine entprechende Belegung der atomaren Aussagen an, die der Formel den Wert 1 zuweist.

Lösungsvorschlag:

(M0 Die einzige Tatsache ist r

$$(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee u) \wedge (\neg t \vee \neg u)$$

(M1 Markiere p:

$$(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee u) \wedge (\neg t \vee \neg u)$$

Markiere q:

$$(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee u) \wedge (\neg t \vee \neg u)$$

Markiere u:

$$(\neg p \vee q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee u) \wedge (\neg t \vee \neg u)$$

(M2 In keiner der beiden Fragen sind alle Atome markiert, daher ist die Formel erfüllbar.

Belegt α alle markierten Atome mit 1 und alle übrigen Atome mit 0, so haben alle positiven Klauseln den Wert 1, und alle Fragen ebenso, damit auch die Konjunktion der Klauseln.

Aufgabe 7 [15 PUNKTE]

Σ bestehe aus einem 2-stelligen Prädikatssymbol R.

(a) [6 PUNKTE] Gegeben sei die Formel $\forall x : \exists y : \exists z : (R(x,y) \wedge R(z,y) \wedge (R(x,z) \Rightarrow R(z,x)))$. In welcher der folgenden Σ-Strukturen $\mathcal{A}_i$ mit Trägermenge $\mathbb{N}$ gilt sie?

$$R^0 = \{\langle m,n\rangle : m < n\} \quad , \quad R^1 = \{\langle m, m+m\rangle : m \in \mathbb{N}\} \quad , \quad R^2 = \{\langle m,n\rangle : m < n+1\}$$

(b) [9 PUNKTE] Konstruieren Sie eine Formel G mit folgenden Eigenschaften:

- es gibt unendlich viele endliche Σ-Strukturen, die G erfüllen;
- jede dieser endlichen Strukturen hat eine gerade Anzahl von Elementen.

Für eine prägnante Beschreibung dieser Strukturen in Worten gibt es 2 SONDERPUNKTE.

Lösungsvorschlag:

(a) R^0 : Da $<$ asymmetrisch und irreflexiv ist, kann die dritte Bedingung nur gelten, wenn die Prämisse falsch ist. Für $x \in \mathbb{N}$ wählen wir also $y = x + 1$ und $z = x$, was die ersten beiden Bedingugen erfüllt.

R^1 : Bei R^1 handelt es sich um den Graphen einer Funktion mit genau einem Fixpunkt 0. Daher lassen sich die ersten beiden Bedingungen nur für $x = z$ erfüllen, dann ist $y = 2x$ zu wählen.

Die Prämisse der dritten Bedingung ist nur für $x = 0$ erfüllbar, und mit $z = 0 = x + x$ gilt dann auch die Schlußfolgerung. In allen anderen Fällen ist die dritte Bedingung aufgrund der falschen Prämisse ebenfalls erfüllt.

R^2 : In diesem Fall ist R^2 die Relation $\leq$ und somit reflexiv. Für $x \in \mathbb{N}$ wähle $y = x + 1$ und $z = x$. Dann sind alle drei Bedingungen erfüllt.

(b) Wir wollen spezielle bipartite Graphen charakterisieren, d.h., Graphen, deren Knotenmenge V in zwei disjunkte Teilmengen U und W zerfällt, so dass jede Kante von einem Knoten in U startet und bei einem Knoten in W endet.

Speziell sollen in unserem Fall die Kanten eine Bijektion $U \longrightarrow W$ darstellen. Diese ist durch Kanten von den Knoten in U zu den eindeutig bestimmten Bildern in W gegeben. Im endlichen Fall haben U und W gleich viele Elemente, also ist die Anzahl aller Knoten gerade.

- Es gibt keine Schleifen:
$$\forall x : \neg R(x, x) \tag{0}$$
- Jeder Knoten tritt als Anfangs- oder Endpunkt einer Kante auf:
$$\forall x : \exists y : ((R(x, y) \vee R(y, x))) \tag{1}$$
- Anfangs- und Endpunkte sind disjunkt:
$$\forall x : \forall y : \forall z : (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z)) \tag{2}$$
- Jeder Knoten ist mit genau einem anderen Knoten verbunden:
$$\forall u : \forall v : \forall w : (R(u, v) \wedge R(u, w) \Rightarrow (v = w)) \wedge (R(u, w) \wedge R(v, w) \Rightarrow (u = v)) \tag{3}$$

Für die Konjunktion der Formeln (0) bis (3) existieren endliche Modelle jeder geraden aber keiner ungeraden Größe.

Altenative Lösung: wir spezifizieren selbstinverse Funktionen ohne Fixpunkte (deren Graphen sind auch bipartit aber ungerichtet, d.h., jede Kante hat eine entgegengesetzte Kante)

- Die Relation ist total:
$$\forall x : \exists y : R(x, y) \tag{0'}$$
- Die Relation ist einwertig (wegen der Totalität also eine Funktion):
$$\forall u : \forall v : \forall w : (R(u, v) \wedge R(u, w) \Rightarrow (v = w)) \tag{1'}$$
- Die Funktion ist selbstinvers (der Graph ist symmetrisch):
$$\forall x : \forall y : R(x, y) \Rightarrow R(y, x) \tag{2'}$$
- Es gibt keine Schleifen (Fixpunkte):
$$\forall x : \neg R(x, x) \tag{3'}$$