Technische Universität Braunschweig

TCS

Prof. Dr. Roland Meyer, Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 4, 2018-05-14

Präsenzaufgabe 1

Die Tableau-Methode zur Überprüfung der Erfüllbarkeit einer Formel wird auf den deutschen Folien 58 und 59 demonstriert, und die dafür zu verwendenden markierten Bäume auf den Folien 61–63 definiert. (Auf Folie 61 dürfte der Eintag (A) in der α-Tabelle unter $\neg\neg A$ bedeuten, dass man auf die zweite Kopie von A verzichten kann.)

Sieh auch: Raymond M. Smullyan, „First-order logic“, Dover Publications, New York, 1968.

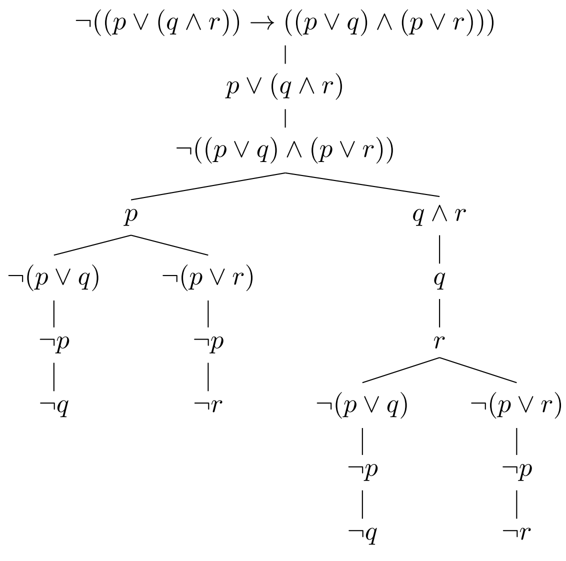
Intuition: Ist die Wurzel erfüllbar, so exisiert ein Ast zu einem atomaren Blatt, so dass alle Knoten entlang dieses Astes konsistent mit 1 bewertet werden können. Läßt sich kein derartiger Ast konsistent mit Einsen bewerten, so ist die Wurzel nicht erfüllbar.

Eine konsistente Bewertung eines Astes mit Einsen wird genau dann unmöglich, wenn dasselbe Atom sowohl positiv als auch negativ entlang des Astes auftritt.

Zeigen Sie, dass $(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ eine Tautologie ist.

Lösungsvorschlag:

A ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist.



Entlang jedes Astes ergibt sich ein Widerspruch, somit ist $\neg((p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$ nicht erfüllbar, und $(p \vee (q \wedge r)) \to ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ ist eine Tautologie.

Hausaufgabe 2 [18 PUNKTE]

Die folgenden Lemmata dürfen in Zukunft (aber noch nicht alle auf diesem Blatt!) bei Beweisen verwendet werden:

L. 1	(Transitivität der Implikation)	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
L. 2	(Aus der Inkonsistnz folgt alles)	$\neg B \to (B \to A)$
L. 2.10	(doppelte Negation ist entfernbar)	$\neg\neg A \to A$

L. 3	(doppelte Negation is herleitbar)	$B \to \neg\neg B$
L. 4	(Variante der Kontraposition)	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
L. 5	(Negation der Implikation)	$B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$
L. E1	(Hilfsergebnis 1)	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg Ax))$
L. E2	(Hilfsergebnis 2)	$(A \to \neg Ax) \to \neg A$
L. 6	(Negation aufgrund von Inkonsistenz)	$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
L. 7	(Elimination widersprüchlicher Voraussetzungen)	$(B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$

Verwenden Sie zum Nachweis folgender Regeln außer den Axiomen höchstens frühere Regeln:

(a) [4 PUNKTE] L. 3: $\vdash B \to \neg\neg B$

(b) [4 PUNKTE] L. 4: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

(c) [4 PUNKTE] L. 5: $\vdash B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$

(d) [4 PUNKTE] L. 7: $\vdash (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$

Lösungsvorschlag:

(a) Nach Beispiel 2.10 wissen wir $\vdash \neg\neg A \to A$, und damit auch $\vdash \neg\neg\neg B \to \neg B$.

1. $\neg\neg\neg B \to \neg B$	Bsp. 2.10
2. $(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to (B \to \neg\neg B)$	Ax3
3. $B \to \neg\neg B$	MP(1,2)

(b) Nach dem Dedukltionstheorem genügt es, $\{A \to B, \neg B\} \vdash \neg A$ nachzuweisen.

1. $A \to B$	Annahme
2. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	Ax3
3. $\neg B \to \neg A$	MP(1,2)
4. $\neg B$	Annahme
5. $\neg A$	MP(3,4)

(c) Nach dem Dedukltionstheorem genügt es, $\{B\} \vdash \neg C \to \neg(B \to C)$ nachzuweisen. Nach Teil (b) gilt aber

$$\vdash ((B \to C) \to C) \to (\neg C \to \neg(B \to C))$$

Damit genügt es, $\{B\} \vdash (B \to C) \to C$ nachzuweisen, was nach dem Deduktionstheorem äquivalent ist zu $\{B, B \to C\} \vdash C$, bzw. zu $\{B \to C\} \vdash B \to C$. Aber letzteres it trivial.

(d) [6 PUNKTE] Nach dem Deduktionstheorem genügt es, $\{(B \to A), (\neg B \to A)\} \vdash A$ nachzuweisen.

1. $(B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$	L. 4
2. $B \to A$	Annahme
3. $\neg A \to \neg B$	MP(1,2)
4. $(\neg B \to A) \to (\neg A \to \neg\neg B)$	L. 4
5. $\neg B \to A$	Annahme
6. $\neg A \to \neg\neg B$	MP(4,5)
7. $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A)$	L. 6
8. $(\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A$	MP(3,7)
9. $\neg\neg A$	MP(6,8)
10. A	L. 2.10

Hausaufgabe 3 [22 PUNKTE]

Der berühmte **Vierfarbensatz** besagt, dass man auf jedem Globus mit endlich vielen zusammenhängenden Ländern diese so mit vier Farben einfärben kann, dass benachbarte Länder stets unterschiedliche Farben haben. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes oder einer Folgerung daraus, dass der Vierfarbensatz auch für Globen mit abzählber unendlich vielen Ländern gilt.

Zur Terminologie: Ein Land heißen **zusammenhängend**, wenn man je zwei Pinkte des Landes durch einen Weg verbinden kann, der innderhalb des Landes verläuft. Damit sind Inseln (Sylt) oder Exklaven (Kaliningrad) verboten[1] Zwei Länder heißen **benachbart**, wenn sie ein gemeinsames Stück Grenz haben, das keine **Ecke** ist, wobei man unter Ecken Punkte auf dem Globus versteht, die zu drei oder mehr Ländern gehören (etwa Four Corners in den USA, wo Arizona, Colorado, New Mexico und Utah zusammentreffen; Arizona und Colorado sind nicht benachbart, ebensowenig Utah und New Mexico).

Üblicherweise übersetzet man das Problem in ein Problem über **ungerichtete planare Graphen**: diese bestehen aus einer Menge V sog. „Knoten“ (= Hauptstädte der Länder, interpretiert als Punkte in der xy-Ebene) und einer Teilmenge $E \subseteq V \times V$ sog. „Kanten“ (= Autobahnen zwischen den Hauptstädten benachbarter Länder, die die Grenze genau einmal überqueren); letztere sollen sich in der xy-Ebene zeichnen lassen, ohne dass sich Kanten schneiden (**Planarität**).

(a) [2 PUNKTE] Was bedeutet die 4-Färbbarkeit einer Landkarte für den zugehörigen planaren Graphen?

(b) [4 PUNKTE] Genügen vier Farben auch, wenn man auf die Forderung nach Planarität verzichtet, d.h., wenn sich die Kanten bei der Einbettung in die xy-Ebene auch schneiden dürfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) [10 PUNKTE] Verwenden Sie für einen gegebenen planaren Graphen $G = \langle V, E \rangle$ atomare Formeln der Form $C_{u,j}$, die die möglichen Farben $j < 4$ eines jeden Knoten $u \in V$ ausdrücken; konstruieren Sie daraus eine Menge von Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn G 4-färbbar ist.

(d) [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass auch jeder abzählbar unendliche planare Graph mit vier Farben gefärbt werden kann. Was können Sie über die 4-Färbbarkeit überabzählbarer planarer Graphen aussagen?

Für Neugierige: Wieviele Farben braucht man, wenn man die Kugel (Globus) durch einen Torus ersetzt? Und warum ist der Übergang von Landkarten auf einem Globus zu planaren Graphen in der xy-Ebene gerechtfertigt? Verliert man dabei nicht ein Land (etwa die Antarktis), oder ist die Erde doch flach wie ein Frisbee?

Lösungsvorschlag:

(a) Eine korrekte 4-Färbung weist den Knoten des Graphen Farben aus einer 4-elementigen Menge, etwa $4 = \{0, 1, 2, 3\}$, zu, so dass die Endpunkte jeder Kante verschiedenen Farben haben. Etwas mathematischer: Eine 4-Färbung ist ein Graphenmorphismus (= Knoten- und Kanten-erhaltende Abbildung) von $G = \langle V, E \rangle$ in den vollständigen Graphen K_4 mit Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$, in dem je zwei verschiedene(!) Knoten durch eine Kante verbunden sind.

(b) Nein, betrachte K_5 mit Knotenmenge $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, in dem je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden sind. Während K_4 noch planar ist, hat K_5 diese Eigenschaft nicht mehr (man versuche, den Knoten 4 in dieselbe Ebene zu zeichnen wie K_4, und dann mit allen Knoten von K_4 so zu verbinden, dass keine der vorhandenen Kanten geschnitten wird).

(c) • Jeder Knoten soll mindestens eine Farbe haben: $F_u := C_{u,0} \vee C_{u,1} \vee C_{u,2} \vee C_{u,3}$ für $u \in V$.

[1] Ein Land mit m Zusammenhangskomponenten nennt man auch m-**Pire**; hier sind wir nur an 1-Pires interessiert.

- Jeder Knoten soll höchstens eine Farbe haben: $E_u = \bigwedge_{j<k<4}(C_{u,j} \to \neg C_{u,k})$ für $u \in V$;
- Endpunkte von Kanten sind unterschiedlich gefärbt: $K_{u,v} = \bigwedge_{j<4} \neg(C_{u,j} \wedge C_{v,j})$ sofern $\{u,v\} \in E$.

Δ_G bestehe aus all diesen Formeln.

Nach Konstruktion hat im endlichen Fall die Landkarte, bzw. der zugehörige planare Graph genau dann eine 4-Färbung, wenn Δ_G erfüllbar ist. Der 4-Farbensatz garantiert nun, dass Δ_G immer erfüllbar ist.

(d) Ist der Graph G , bzw. die disjunkte Vereinigung $V + E$, abzählbar unendlich, so gilt dies auch für die Menge Δ_G .

Um für eine endliche Teilmengen $\Phi \subseteq \Delta_G$ die Erfüllbarkeit zu zeigen, betrachte die endliche Menge $U \subseteq V$ aller Knoten (Länder), die in den Formeln von Φ als Index vorkommen. Der von diesen Knoten aufgespannte Teilgraph H von G entsteht durch Löschen aller Knoten aus $V - U$ im Graphen G , samt der mit diesen Knoten inzidenten Kanten [3. PUNKTE]

Wir ergänzen nun Φ um alle fehlenden Formeln F_u , E_u und $K_{u,v}$, in denen Knoten aus H als Index vorkommen; die resultierende Menge Δ_H ist immer noch endlich, und nach dem 4-Farbensatz erfüllbar. Damit ist auch die Teilmenge $\Phi \subseteq \Delta_H$ erfüllbar [3 PUNKTE] .

Aufgrund des Kompaktheitssatz ist damit auch Δ_G erfüllbar [1 PUNKT] .

Ist der Graph G , bzw. $K + E$ überabzählbar, so können wir den Kompaktheitssatz **so wie wir ihn kennengelernt haben** nicht auf die oben beschriebene Formelmenge anwenden, da diese im Gegensatz zur Aussagenlogik überabzählbar viele Atome verwendet [2 PUNKTE] ! Man kann aber zeigen (nicht in dieser VL), dass die Einschränkung auf abzählbar viele Atome nicht entscheident wichtig ist. Dann läßt sich der Kompaktheitssatz als Spezialfall des Satzes von Tychonoff aus der Topologie auffassen. Damit ist dann auch ein überabzählbarer planarer Graph 4-färbbar.

Bei einem Torus reichen übrigens 7 Farben aus.

Der Übergang von einer Landkarte auf einem Globus zu Hauptstädten mit verbindenden Autobahnen liefert zunächst mal einen „sphärischen“ Graphen. Entfernt man nun eine der durch die Kanten begrenzten Flächen (kein Land! eher eine Grenzregion, in der sich soviele Grenzen treffen, wie Kanten die Fläche begrenzen) und zieht das restliche Gebilde auseinander, so erhält man einen planaren Graphen. Man kann auch den unendlichen Außenbereich des planaren Graphen mit der entfernten endlichen Fläche auf der Kugel identifizieren.

Hausaufgabe 4 [5 PUNKTE]

Für jede Zahl $n \in I\!N$ sei A_n eine logische Formel, die genau dann erfüllt ist, wenn eine bestimmte Menge X mindestens n Elemente hat, und A_∞ eine Formel, die genau dann erfüllt ist, wenn X abzählbar unendlich ist.

[5 PUNKTE] Offenbar gilt $\Sigma = \{ A_i : i \in I\!N \} \models A_\infty$. Aber aufgrund des Kompaktheitssatzes enthält Σ eine endliche Teilmenge Σ_0 mit $\Sigma_0 \models A_\infty$. Lösen Sie diesen Widerspruch auf.

Lösungsvorschlag:

Es gibt keine derartige Formel A_∞ !

Hausaufgabe 5 [12 PUNKTE]

In Lemma 1.13 auf den deutschen Folien wurde ohne Beweis behauptet, dass $\models\!\!\!\dashv$ eine **Kongruenzrelation** ist.

(a) [5 PUNKTE] Gegeben $A \models A'$. Zeigen Sie, wie sich $\neg A$ und $\neg A'$ bzw. $A * B$ sowie $A' * B$ zueinander hinsichtlich $\models$ verhalten, wobei B eine Formel und $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \}$ gilt.

(b) [3 PUNKTE] Führen Sie Analyse aus Teil (a) für $\models\!\!\!\dashv$ anstelle von $\models$ durch, aber nun für $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \leftrightarrow, \}$.

(c) [4 PUNKTE] Gegeben $A \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A'$ und $B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; B'$. Wie verhalten sich $A * B$ und $A' * B'$ hinsichtlich $\models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid$, wobei $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ gilt?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag:

(a) Ist φ eine für A, A' und ggf. B passende Belegung, so gilt

($\neg$)

$$\tilde{\varphi}(\neg A') = 1 - \tilde{\varphi}(A') \leq 1 - \tilde{\varphi}(A) = \tilde{\varphi}(\neg A)$$

also $\neg A' \models \neg A$.

($\wedge$)

$$\tilde{\varphi}(A' \wedge B) = \inf\{\tilde{\varphi}(A'), \tilde{\varphi}(B)\} \leq \inf\{\tilde{\varphi}(A), \tilde{\varphi}(B)\} = \tilde{\varphi}(A \wedge B)$$

also $(A \wedge B) \models (A' \wedge B)$.

($\vee$)

$$\tilde{\varphi}(A' \vee B) = \sup\{\tilde{\varphi}(A'), \tilde{\varphi}(B)\} \leq \sup\{\tilde{\varphi}(A), \tilde{\varphi}(B)\} = \tilde{\varphi}(A \vee B)$$

also $(A \vee B) \models (A' \vee B)$.

($\to$) Aus $\tilde{\varphi}(A) \leq \tilde{\varphi}(A') \leq \tilde{\varphi}(B)$ folgt $\tilde{\varphi}(A) \leq \tilde{\varphi}(B)$, also gilt $(A' \to B) \models (A \to B)$.

($\leftarrow$) Aus $\tilde{\varphi}(B) \leq \tilde{\varphi}(A) \leq \tilde{\varphi}(A')$ folgt $\tilde{\varphi}(B) \leq \tilde{\varphi}(A')$, also gilt $A \leftarrow B \models A' \leftarrow B$, bzw. $B \to A \models B \to A'$.

(b) $\models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid$ ist die Symmetrisierung von $\models$. Also folgt aus $A \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A'$ sofort

$$\neg A \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; \neg A' \quad \text{sowie} \quad A * B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' * B \quad \text{für} \quad * \in \{\wedge, \vee, \to, \leftarrow, \leftrightarrow\}$$

(c) Aufgrund der Symmetrie von $\models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid$ haben wir außerdem

$$\begin{gathered} A \wedge B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \wedge B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \wedge B' \\ A \vee B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \vee B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \vee B' \\ A \to B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \to B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \to B' \\ A \leftrightarrow B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \leftrightarrow B \models\!\!\!\!\!\!\;\;\mid\; A' \leftrightarrow B' \end{gathered}$$

Man kann ebensogut zuerst B durch B' ersetzen, und dann A durch A'.