Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 6, 2018-06-04

Präsenzaufgabe 1

Im Folgenden fassen wir Klauseln wieder als Mengen von Literalen auf. Wenn n atomare Formeln (=Variablen) zur Verfügung stehen, wieviele verschiedene Klauseln kann man formen,

(a) in denen jede Variable höchstens einmal auftritt?

(b) in denen maximal zwei Literale auftreten und deren Variablen verschieden sind?

(c) in denen maximal drei Literale auftreten und deren Variablen verschieden sind?

Was schließen Sie daraus für die Anzahl der Schritte bei der Resolutionsmethode, wenn die Ausgangsformel in KNF nur Klauseln enthält, die den Bedingungen (b) bzw. (c) genügen?

Lösungsvorschlag:

(a) jede Variable kann als positives Literal, als negatives Literal oder gar nicht auftreten. also gibt es 3^n Möglichkeiten (das schließt den Fall des neutralen Elements $\perp$ für die Disjunktion mit ein, das der leeren Klausel entspricht).

(b) Bei genau zwei Literalen stehen $2n$ für das erste Literal und $2n-2$ für das zweite Literal zur Verfügung (die Variablen sollen verschieden sein); da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt es also $n(2n-2) = 2n^2 - 2n$ Möglichkeiten. Dazu kommen noch $2n$ Klauseln mit genau einem Literal und eine Klausel ohne Literal, also $\perp$. Zusammen sind das $2n^2 + 1$ viele KLauseln.

(c) Bei genau drei Literalen und Atomen stehen $2n$ für das erste Literal, $2n-2$ für das zweite Literal, und $2n-4$ für das dritte Literal zur Verfügung; da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt es also $n(2n-2)(2n-4)/3$ Möglichkeiten. Dazu kommen noch die $2n^2+1$ vielen KLauseln aus Teil (b).

In Teil (b) bleibt die Länge der Resolventen durch 2 beschränkt, daher ist die Anzahl der Schritte durch ein quadratisches Polynom in n beschränkt.

In Teil (c) können Resolventen der Länge > 3 entstehen, insofern gibt es hier keine polynomiale Schranke in n für die Schrittzahl.

Präsenzaufgabe 2

[Basis für dem Resolutionenkalkül]

[10 PUNKTE] Beweisen Sie: Für zwei Klauseln K und K' mit komplementären Literalen $X \in K$ sowie $\neg X \in K'$ und Resolvente $L := (K - \{X\}) \cup (K' - \{\neg X\})$ gilt für jede passende Belegung der Atome $\tilde{\varphi}(K \wedge K') \leq \tilde{\varphi}(L)$ und somit $\tilde{\varphi}(K \wedge K') = \tilde{\varphi}(K \wedge K' \wedge L)$, mit anderen Worten, $K \wedge K' \mathrel{\models\!\!\!\dashv} K \wedge K' \wedge L$.

Lösungsvorschlag:

Nach Konstruktion ist jede für $K \wedge K'$ passende Belegung auch passend für L. Wir unterscheiden zwei Fälle:

▷ Aus $\tilde{\varphi}(K \wedge K') = 1$ folgt nach Definition der Semantik $\tilde{\varphi}(K) = 1 = \tilde{\varphi}(K')$. Falls $\varphi(X) = 0$, dann impliziert $\tilde{\varphi}(K) = 1$ sofort $\tilde{\varphi}(K - X) = 1$, denn K muss ein von X verschiedenes unter φ wahres Literal enthalten. Analog folgt aus $\varphi(X) = 1$ sofort $\tilde{\varphi}(K' - \neg X) = 1$, denn $\neg X$ kann nicht zur Wahrheit von K' unter φ beitragen. In beiden Fällen gilt:

$$\tilde{\varphi}(L) = \sup\{\tilde{\varphi}(K - X), \tilde{\varphi}(K' - \neg X)\} = 1 = \tilde{\varphi}(K \wedge K')$$

und folglich

$$\tilde{\varphi}(K \wedge K' \wedge L) = \inf\{\tilde{\varphi}(K \wedge K'), \tilde{\varphi}(L)\} = 1$$

▷ Aus $\tilde{\varphi}(K \wedge K') = 0$ folgt $\tilde{\varphi}(K \wedge K' \wedge L) = \inf\{\tilde{\varphi}(K \wedge K'), \tilde{\varphi}(L)\} = 0$.

Hausaufgabe 3 [15 PUNKTE]

[Resolutionenkalkül via Fixpunktberechnung]

Für eine Menge H von Klauseln entsteht $\mathrm{Res}(H)$ durch Hinzunahme aller Resolventen zweier Klauseln aus H:

$$\mathrm{Res}(H) := H \cup \{\, L \,:\, L \text{ ist Resolvente zweier } H\text{-Klauseln} \,\}$$

Rekursiv setzen wir

$$\mathrm{Res}^0(H) := H \quad , \quad \mathrm{Res}^{i+1}(H) := \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^i(H)) \quad \text{für } i > 0$$

(1) [5 PUNKTE] Weisen Sie nach, dass dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten terminiert.

(2) [5 PUNKTE] Formulieren Sie den Resolutionskalkül als schrittweise Berechnung der Mengen $\mathrm{Res}^i(A)$.

(3) [5 PUNKTE] Passen Sie den Satz zur Korrektheit und (Widerlegungs-)Vollständigkeit an diese Variante des Resolutionenkalküls an.

Lösungsvorschlag:

(1) A möge n Atome enthalten. Nach Aufgabe 1(a) existieren also 3^n mögliche Klauseln in diesen Atomen. Somit muß die Res-Folge nach endlich vielen Schritten stationär werden, und kann somit terminiert werden.

(2) Wir identifizieren eine Formel A in KNF mit der entsprechenden Menge von Klauseln, also $\mathrm{Res}^0(A)$. Iterativ wird $\mathrm{Res}^i(A)$ bestimmt, was gemäß (a) nach endlich vielen Schritten stationär wird. Nennen wir das Ergebnis etwa $\mathrm{Res}^\infty(A)$.

(3) Nun kann entschieden werden, ob die leere Disjunktion im Ergebnis enthalten ist oder nicht. Also:

Eine Formel A in KNF ist unerfüllbar gdw. $\emptyset \in \mathrm{Res}^\infty(A)$.

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

Wir betrachten folgende Variante des Tableau-Verfahrens: gegeben sei $\Sigma = \{\, A_i \,:\, i \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \mathcal{F}$. Die (endliche) Approximation ω_n nach Verbrauch der Formeln A_i, $i < n$ ist rekursiv definiert durch

(1) $\omega_0 = \tau_0$ ist ein vollständiges Tableau für A_0;

(2) Aus einem vollständigen Tableau ω_n für $\{\, A_i \,:\, i < n+1 \,\}$ und einem vollständigen Tableau τ_{n+1} für A_{n+1}, ergibt sich das vollständige Tableau ω_{n+1} für $\{\, A_i \,:\, i < n+2 \,\}$ durch Anhängen von τ_{n+1} an jedes Blatt von ω_n (Blätter sind zwingend mit Literalen markiert).

Wesentlich bei den Tableaus sind weniger die Bäume oder ihre Äste, als die Mengen von Literalen(!) entlang der Äste, nennen wir sie kurz **L-Astmengen**. Diese bestimmen die möglichen Belegungen, die Σ erfüllen. Bereits abgeschlossene L-Astmengen können von der weiteren Konstruktion ausgenommen werden.

Zeigen Sie:

(a) Die offenen L-Astmengen von ω_{n+1} sind genau diejenigen Vereinigungen von offenen L-Astmengen von ω_n mit offenen L-Astmengen von τ_{n+1} , die immer noch offen sind.

(b) Σ ist genau dann unerfüllbar, wenn die obige Konstruktion offener L-Astmengen terminiert.

Lösungsvorschlag:

Die Menge $\mathcal{F}$ aller Formeln zerfällt in die paarweise disjunkten Menge der Literale, der α- und der β-Formeln.

Behauptung 1: Tritt entlang eines Astes Θ in einem vollständigen Tableau τ die α-Formeln C mit den Komponenten C_0 und C_1 ebenso auf wie die β-Formel $\neg C$ mit den Komponenten $\neg C_0$ und $\neg C_1$, dann erscheinen entang ebendieses Astes C_0 und $\neg C_0$, oder C_1 und $\neg C_1$. Insbesondere treten dann auf diesem Ast auch zwei komplementäre Literale auf.

Dies folgt sofort aus der Tabelle auf Folie 61 und der Vollständigkeit des Tableaus.

Beobachtung 2: Sobald in der Konstruktion der VL die Work-List leer ist, wird die nächste Formel A_j an alle bisherigen Blätter angehängt. In all diesen Knoten wird anschließend parallel dasselbe (Teil-)Tableau τ_{j+1} für A_{j+1} erzeugt. Das kann man effizienter haben, indem man τ_{j+1} nur einmal erzeugt und das Ergebnis an die oben genannten Knoten anhängt.

Behauptung 3: alle erfüllenden Belegungen einer vollständigen offenene Menge Θ stimmen auf den Literalen in Θ überein. Betrachte die Belegung φ aus dem Beweis von Lemma 3.4 (Hintikka). Modifikationen von φ auf Atomen, die in Θ vorkommen, haben unmittelbar den Effekt, dass Θ von der neuen Belegung nicht mehr erfüllt wird.

Aufgrund von Behauptung 3 und 1 sind die einzig relevanten Elemente eines Astes Θ in einem vollständigen Tableau die dort vorkommenden Literale.

Aufgrund von Beobachtung 2 und Behauptung 1 kann man nach Konstruktion von ω_j alle markierenden Formeln vergessen, die keine Literale sind. Und beim nächsten Konstruktionsschritt kann man für das Tableau τ_{j+1} für A_j genauso vorgehen, und die bisher konstruierten offenen Literal-Mengen entsprechend vergrößern (was auch zum Abschluß einiger Mengen führen kann). Damit ist (a) gezeigt.
(b)

ist die Anpassung von Teil (2) des Lemmas 3.9 an die modifizierte Konstruktion: Aufgrund von Behauptung 1 ist die Menge der markierenden Formeln entlang eines vollständigen Astes Θ genau dann offen, wenn die entsprechende Teilmenge der Literale offen ist.

Hausaufgabe 5 [12 PUNKTE]

Zeigen sie, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

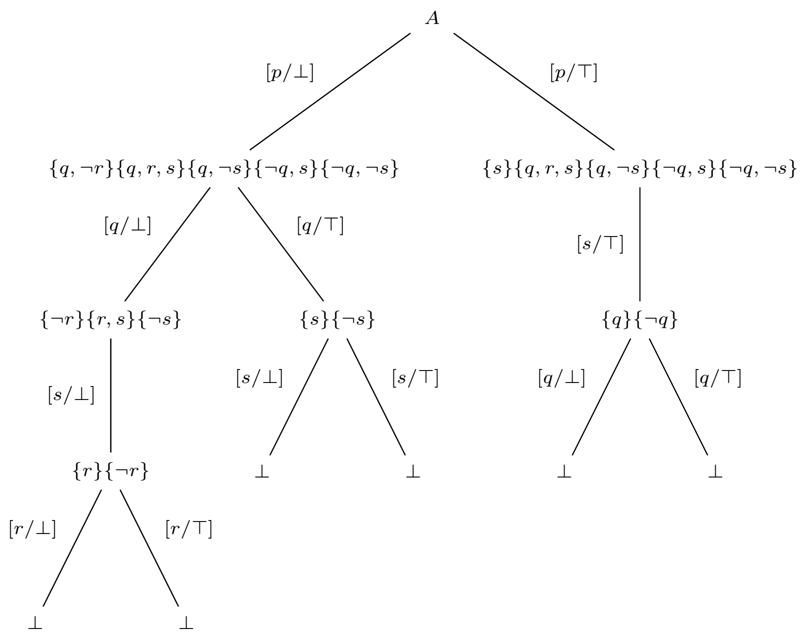
$$(\neg p \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee s) \wedge (\neg q \vee \neg s)$$

(a) [7 PUNKTE] mit dem Davis-Putnam Algorithmus.

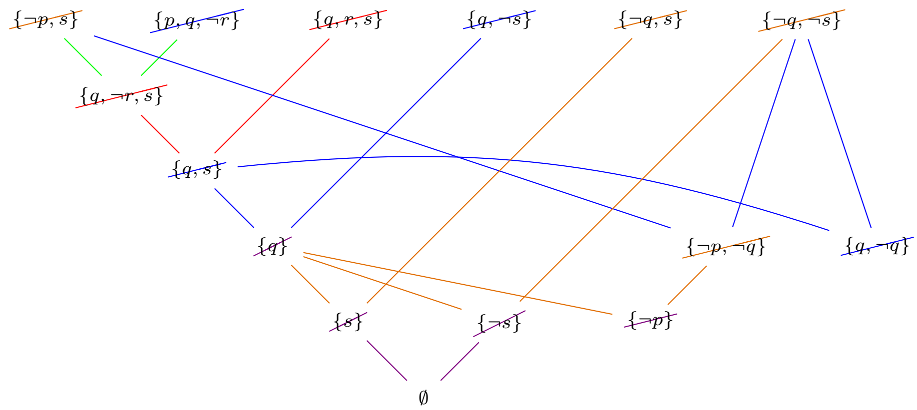
(b) [5 PUNKTE] mit der Resolutionsmethode; minimieren Sie den Rechenaufwand, indem Sie die verfügbaren Atome in einer festen Reihenfolge zur Resolventenbildung verwenden, und subsumierte Klauseln von der weiteren Rechnung ausschließen.

Lösungsvorschlag:

(a)



(b) Hier arbeiten wir die Atome in der Reihenfolge p, r, s, q, s ab, schreiben die neuen Resolventen von links nach rechts auf dieselbe Höhe, und entfernen **sofort** Oberklauseln bzw. zu $\top$ äquivalente Klauseln. Eine andere Reihenfolge mag schneller zum Ziel führen.



Sobald erstmals Resolventen bzgl. s gebildet werden, kommt es darauf an, ob man zuerst $\{\neg p,s\}$ oder $\{q,s\}$ mit $\{q,\neg s\}$ kombiniert. Im ersten Fall würde noch die Resolvente $\{\neg p,q\}$ auftreten, im zweiten Fall wird $\{q,\neg s\}$ als Oberklausel von $\{q\}$ sofort gestrichen.