Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 8, 2018-06-18

Präsenzaufgabe 1

Für eine Signatur S mit Prädikatssymbolen $r_{/1}$ und Prädikatssymbol $s_{/2}$ betrachten wir die Formeln

$$A := \forall x\, \exists y\, \big(s(x,y) \vee r(y)\big) \qquad \text{und} \qquad B := \exists x\, \forall y\, \big(r(x) \to s(x,y)\big)$$

(a) Finden Sie eine bereinigte Darstellung C für $A \wedge B$.

(b) Finden Sie eine Formel D in Prenex-Normalform für $A \wedge B$.

(c) Welche Permutationen der Quantoren sind (in diesem Fall) zulässig, d.h., verändern die Semantik nicht?

(d) Bestimmen Sie mindestens drei Formeln in Skolem-Normalform, die erfüllungsäquivalent zu $A \wedge B$, aber nicht zueinander äquivalent sind.

Lösungsvorschlag:

(a) In $C := \forall x\, \exists y\, \big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \exists u\, \forall v\, \big(r(u) \to s(u,v)\big)$ tritt keine Variable sowohl frei als auch gebunden auf, und keine Variable wird von unterschiedlichen Quantoren gebunden. Man hätte die Umbenennung der Variablen natürlich auch in A vornehmen können.

(b) In C ist es nun zulässig, alle Quantoren nacheinander nach vorne zu ziehen, (vergl. Äquivalenz 11, Lemma 4.16), etwa:

$$\begin{aligned}
C &\models\!\!\!\!\!\!\!= \forall x\, \Big(\exists y\, \big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \exists u\, \forall v\, \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
&\models\!\!\!\!\!\!\!= \forall x\, \exists y\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \exists u\, \forall v\, \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
&\models\!\!\!\!\!\!\!= \forall x\, \exists y\, \exists u\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \forall v\, \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
&\models\!\!\!\!\!\!\!= \forall x\, \exists y\, \exists u\, \forall v\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) =: D_0
\end{aligned}$$

(c) Da die Reihenfolge, in der die Quantoren nach außen gezogen werden, frei wählbar ist, können aber auch folgende Varianten entstehen:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \forall x\, \exists u\, \forall v\, \exists y\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
D_2 &= \exists u\, \forall v\, \forall x\, \exists y\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
D_3 &= \exists u\, \forall x\, \exists y\, \forall v\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
D_4 &:= \forall x\, \exists u\, \exists v\, \forall v\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big) \\
D_5 &= \exists u\, \forall x\, \forall v\, \exists y\, \Big(\big(s(x,y) \vee r(y)\big) \wedge \big(r(u) \to s(u,v)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Dabei ist nur zu beachten, dass früher bearbeitete Quantoren weiter vorne stehen müssen als später bearbeitete.

Letztendlich funktioniert jede Mischung (Shuffeling) der beiden Quantor-induzierten Junktorenpaare $\forall x\, \exists y$ und $\exists u\, \forall v$.

Die letzten beiden Formeln können auch durch Vertauschen benachbarter Quantoren gleichen Typs in D_0 bzw. D_2 entstehen.

(d) Skolemisierung, d.h., die Elimination der Existenzquantoren durch Hinzufügen geeigneter Funktionssymbole zur Signatur liefert erfüllungsäquivalente Formeln, die in den ersten vier Fällen auch nicht untereinander äquivalent sind:

$$\begin{aligned}
E_0 &:= \forall x\, \forall v\, \Big(\big(s(x, f_0(x)) \lor r(f_0(x)) \big) \land \big(r(g_0(x)) \to s(g_0(x), v) \big) \Big) \\
E_1 &= \forall x \forall v\, \Big(\big(s(x, f_1(x, v))) \lor r(f_1(x, v)) \big) \land \big(r(g_1(x)) \to s(g_1(x), v) \big) \Big) \\
E_2 &= \forall v\, \forall x\, \Big(\big(s(x, f_2(x, v))) \lor r(f_2(x, v)) \big) \land \big(r(g_2) \to s(g_2, v) \big) \Big) \\
E_3 &= \forall x\, \forall v\, \Big(\big(s(x, f_3(x))) \lor r(f_3(x)) \big) \land \big(r(g_3) \to s(g_3, v) \big) \Big)
\end{aligned}$$

Präsenzaufgabe 2

Wir betrachten die Signatur S mit einem zweistelligen Prädikatensymbol p (für „Pfeil"). S-Strukturen entsprechen also gerichteten Graphen $G = \langle V, R \rangle$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $p \subseteq V \times V$. (Wenn keine Verwechselungen möglich sind, kann man auf die notationelle Unterscheidung zwischen dem Element p der Signatur und seiner Interpretation in der Menge V verzichten.) Die intendierte Interpretation der atomare Formel $p(x, y)$ ist, dass für jedes $\sigma \in D^V$ die Interpretation $\sigma(x)$ mit $\sigma(y)$ in Relation steht, häufig geschrieben als $x \longrightarrow y$.

Viele Aussagen über Graphen (auch ungerichtete) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über S ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage „Jeder Knoten von G hat einen Vorgänger oder einen Nachfolger" entspricht die Formel $\forall x : \exists y : (p(x, y) \lor p(y, x))$.

Transformieren Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln über S:

(a) „G ist einfach", d.h., hat keine Schleifen;

(b) „G hat eine Senke", d.h., einen Knoten ohne ausghende Kanten;

(c) „G ist transitiv", d.h., die binäre Relation R hat diese Eigenschaft.

(d) „G hat einen Kreis der Länge 4", d.h., eine Folge paarweise verschiedener Knoten x_i, $i < 4$, mit $p(x_{i \bmod n}, x_{i+1 \bmod n})$ für alle $i < 4$.

Lösungsvorschlag:

(a) $\forall x\, \neg R(x, x)$

(b) $\exists x\, \forall y\, \neg R(x, y)$

(c) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, p(x, y) \land p(y, z) \to p(x, z)$

(d) Um auszudrücken, dass n Elemente verschieden sind, braucht man $n(n-1)/2$ viele atomare Negationen der Gleichheit:

$$\begin{aligned}
\exists x\, \exists y\, \exists z\, \exists x\, \big(&\neg(x = y) \land \neg(x = z) \land \neg(x = u) \land \neg(y = z) \land \neg(y = u) \land \neg(z = u) \land \\
&p(x, y) \land p(y, z) \land p(z, u) \land p(u, x) \big)
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 3 [8 PUNKTE]

[Auswertung prädikatenlogischer Formeln]

Gegeben sei eine Signatur $S = \langle \boldsymbol{Fun}, \boldsymbol{Pred} \rangle$, mit

$$\boldsymbol{Fun} = \{\mathrm{not}_{/1}, \mathrm{or}_{/2}\} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Pred} = \{\mathrm{might\_be}_{/1}, \mathrm{is}_{/1}\}$$

und eine S-Struktur $\mathcal{M} = \langle\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}, I\rangle$, deren Datenbereich linear geordnet ist ($\underline{a} < \underline{b} < \underline{c}$) und deren Interpretationen gegeben sind durch

$$\text{not}^{\mathcal{M}}(\underline{a}) = \underline{c} \quad , \quad \text{not}^{\mathcal{M}}(\underline{b}) = \underline{b} \quad , \quad \text{not}^{\mathcal{M}}(\underline{c}) = \underline{a}$$

$$\text{or}^{\mathcal{M}} = \max \quad , \quad \text{is}^{\mathcal{M}} = \{\underline{c}\} \quad \text{und} \quad \text{might\_be}^{\mathcal{M}} = \{\underline{b}, \underline{c}\}$$

(beachte die Identifikation von charakteristischen Funktionen mit Teilmengen).

Berechnen Sie Schritt für Schritt den Wahrheitswert $\mathcal{M}[\![A]\!]$ der geschlossenen Formel

$$A \equiv \exists x \Big(\big(\text{is}(x) \lor \text{is}(\text{not}(x))\big) \land \forall y \left(\text{might\_be}(\text{or}(y, x)) \to \text{is}(\text{or}(x, y))\right)\Big)$$

Hausaufgabe 4 [10 PUNKTE]

[Formeln in der Prädikatenlogik]

Zeigen Sie (mit Hilfe eines Beweises) oder widerlegen Sie (mittels eines Gegenbeispiels in Form eines Models):

(a) Welche Beziehungen gelten zwischen $A \equiv \exists x \, \forall y \, p(x, y)$ und $B \equiv \forall y \, \exists x \, p(x, y)$:

- $A \models B$
- $B \models A$

(b) Ist die Formel $C \equiv \big(\forall x \, p(x)\big) \to \big(\exists x \, p(x)\big)$ allgemeingültig, d.h., eine prädikatenlogische Tautologie?

Hausaufgabe 5 [12 PUNKTE]

[Modelierung: Syntax der PL]

Drücken Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe aus. Spezifizieren Sie dabei die verwendeten Funktions- und Prädikatssymbole und ihre Stelligkeit. Geben Sie die intendierte Bedeutung der Symbole an oder wählen Sie aussagekräftige Namen. Dabei soll sich möglichst viel Struktur der Aussage in der Struktur der Formel wiederfinden: Die Aussage „Alle Vögel sind schon da“ soll also nicht mit der Formel ausgedrückt, die nur aus dem nullstelligen Prädikat alleVögelSindSchonDa besteht, sondern z.B. mit

$$\forall x \, (iV(x) \to sD(x))$$

wobei die Signatur S mindestens die Prädikate $iV_{/1}$ und $sD_{/1}$ mit der intendierten Interpretation „ist Vogel“ bzw. „schon da“ enthalten soll.

(a) Nur Tage, an denen es nicht regnet, sind gute Tage.

(b) Jedes rote Buch ist informativer als jedes blaue.

(c) Es gibt ein Buch, dessen Autoren alle berühmt sind.

(d) Jedes Buch, dessen Autoren alle berühmt sind, ist interessant.

Hausaufgabe 6 [10 PUNKTE]

Beweisen Sie das Substitutionslemma 4.19:

$$\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![A]\!](\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})$$

Lösungsvorschlag:

(Die Aufgabe ist doch erheblich aufwändiger als zunächst erwartet, enspricht aber in etwa dem Schwierigkeitsgrad des Materials der letzten VL; die schwerfällige Notation trägt ihren Teil dazu bei. Insofern scheinen 24 Punkte angemessen; allein schon die Fälle korrekt zu unterscheiden dürfte 8 Punkte wert sein. Ich plane die Lösung zu veröffentlichen, dann braucht Ihr das nicht alles an die Tafel zu schreiben.)

Zunächst führen wir eine Induktion über Terme u durch:

- u ist eine von x verschiedene Variable:

$$\mathcal{M}[\![u\{x/t\}]\!](\sigma) = \sigma(u) = \mathcal{M}[\![u]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)$$

- $u = x$:

$$\mathcal{M}[\![u\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) = \big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)(u) = \mathcal{M}[\![u]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)$$

- $u = f(u_0, \ldots, u_{n-1})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![u\{x/t\}]\!](\sigma) &= f^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![u_0\{x/t\}]\!](\sigma), \ldots, \mathcal{M}[\![u_{n-1}\{x/t\}]\!](\sigma)\big)\\ &= f^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![u_0]\!](\sigma\{\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}), \ldots, \mathcal{M}[\![u_{n-1}]\!](\sigma\{\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})\big)\\ &= \mathcal{M}[\![u]\!](\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})\end{aligned}$$

Nun erfolgt die Induktion über den Aufbau prädikatenlogischer Formeln:

- A ist eine Gleichung $t_0 = t_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = 1 \quad &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![t_0\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![t_1\{x/t\}]\!](\sigma)\\ &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![t_0]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big) = \mathcal{M}[\![t_1]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)\\ &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![A]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) = 1\end{aligned}$$

- A ist eine Prädikatsauswertung $A = p(u_0, \ldots, u_{n-1})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = 1 \quad &\text{gdw} \quad \big\langle \mathcal{M}[\![t_0\{x/t\}]\!](\sigma), \ldots, \mathcal{M}[\![t_{n-1}\{x/t\}]\!](\sigma)\big\rangle \in p^{\mathcal{M}}\\ &\text{gdw} \quad \big\langle \mathcal{M}[\![t_0]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big), \ldots, \mathcal{M}[\![t_{n-1}]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)\big\rangle \in p^{\mathcal{M}}\\ &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![A]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) = 1\end{aligned}$$

- A ist eine Negation $\neg B$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) &= 1 - \mathcal{M}[\![B\{x/t\}]\!](\sigma)\\ &= 1 - \mathcal{M}[\![B]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\} = \mathcal{M}[\![A]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\end{aligned}$$

- A ist eine Konjunktion $B \wedge C$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B\{x/t\}]\!](\sigma), \mathcal{M}[\![C\{x/t\}]\!](\sigma)\big\}\\ &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}, \mathcal{M}[\![C]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big\}\\ &= \mathcal{M}[\![A]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\end{aligned}$$

- A ist eine Disjunktion $B \vee C$: analog wie bei der Konjunktion mit $\sup$ anstlle von $\inf$.
- A ist eine Implikation $B \to C$: umschreiben zu $\neg B \vee C$.
- A entsteht durch universelle Quantifizierung $A \equiv \forall y\, B$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) &= \mathcal{M}[\![\forall z\, B\{y/z\}\{x/t\}]\!](\sigma) \quad \text{mit} \quad z \notin V(B) \cup \{x\} \cup V(t)\\ &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B\{y/z\}\{x/t\}]\!](\sigma\{z/d\}) \,:\, d \in D\big\}\\ &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B\{y/z\}]\!]\big(\sigma\{z/d\}\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma\{z/d\})\}\big) \,:\, d \in D\big\}\\ &= \mathcal{M}[\![\forall z\, B\{y/z\}]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big) \quad \text{weil} \quad z \notin V(B) \cup \{x\} \cup V(t)\\ &= \mathcal{M}[\![A]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)\end{aligned}$$

- A entsteht durch existentielle Quantifizierung $A \equiv \exists y\, B$: analog wie bei der universellen Quantifizierung mit $\sup$ anstelle von $\inf$.