Technische Universität Braunschweig

TCS

Prof. Dr. Roland Meyer, Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt A, 2018-07-01

Die Aufgaben sind optional, abzugeben brauchen nur diejenigen, die momentan hinsichtlich der Studienleistung „Hausaufgabenpunkte“ auf der Kippe stehen. Andererseits ist der Stoff durchaus klausurrelevant.

Präsenzaufgabe 1

Die Äquivalenzrelationen sind genau die Urbilder von Gleichheitsrelationen.

Genauer: ist $\doteq \ \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation, so existiert eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ mit $f(a) = f(b)$ genau dann wenn $\langle a, b\rangle \in \ \doteq$. Schreibt man die vordere Formel etwas unkonventionell als $\langle f(a), f(b)\rangle \in \ =_Y$, so bedeutet dies gerade

$$\doteq \ = (f \times f)^{-1}[=_Y] \tag{1}$$

wobei $X \times X \xrightarrow{f \times f} Y \times Y$ komponentenweise operiert.

Umgekehrt ist jede gemäß (1) definierte Relation $\doteq$ eine Äquivalenzrelation.

Hausaufgabe 2 [15 PUNKTE]

[Homomorphismen zwischen S-Strukturen]

Betrachte eine Signatur $S = \langle \boldsymbol{Fun}, \boldsymbol{Pred}\rangle$.

Definition. Sind $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ und $\mathcal{N} = \langle E, J\rangle$ S-Strukturen, so heißt eine Abbildung $D \xrightarrow{h} E$ $\boldsymbol{Fun}$-*Homomorphismus* von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, falls für jedes $f_{/k} \in \boldsymbol{Fun}$ folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
D^k \arrow[r, "h^k"] \arrow[d, "f^{\mathcal{M}}"'] & E^k \arrow[d, "f^{\mathcal{N}}"] \\
D \arrow[r, "h"'] & E
\end{tikzcd}$$

d.h., falls gilt

$$h(f^{\mathcal{M}}(d_0, \ldots, d_{k-1})) = f^{\mathcal{N}}(h(d_0), \ldots, h(d_{k-1}))$$

Ist weiterhin für jedes $p_{/k} \in \boldsymbol{Pred}$ die Interprtation $p^{\mathcal{M}} \subseteq D^k$ im Urbild von $p^{\mathcal{N}} \subseteq E^k$ unter h^k enthalten, so sprechen wir von einem S-Homomorphismus.

Zeigen Sie:

(1) [5 PUNKTE] Falls $\boldsymbol{Pred} = \emptyset$ es gibt genau eine Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für S .

(2) [5 PUNKTE] für jede S-Struktur $\mathcal{N} = \langle E, J\rangle$ und jede Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ für S ist die Abbildung

$$D_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\mathcal{N}[\![-]\!]} E$$

der einzige $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{N}$.

(3) [5 PUNKTE] für jede S-Struktur $\mathcal{N} = \langle E, J\rangle$ gibt es eine maximale Herbrand-Struktur $\bar{\mathcal{H}}$ (hinsichtlich der Größe der Interpretationen der Prädikate) für S , so dass $\mathcal{N}[\![-]\!]$ sogar ein S-Homomorphismus von $\bar{\mathcal{H}}$ nach $\mathcal{N}$ ist.

Hausaufgabe 3 [12 PUNKTE]

[Elimination des „=“-Symbols aus Formeln]

Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man zu jeder Formel $A \in \boldsymbol{FO}(S)$ eine erfüllungsäquivalente Formel A' *ohne Gleichheitszeichen* konstuieren kann, so dass Folgendes gilt: wenn A' ein abzählbares Modell $\mathcal{M}'$ besitzt, dann soll A auch ein abzählbares Modell $\mathcal{M}$ haben. Hier genügt es, die Konstruktion der Formel A' zu skizzieren, und für die Beschreibung von $\mathcal{M}$ reicht es, den Datenbereich zu erläutern.

Hausaufgabe 4 [21 PUNKTE]

[Herbrand und Löwenheim-Skolem revisited]

Wir betrachten eine Signatur $S = \langle \boldsymbol{Fun}, \boldsymbol{Pred} \rangle$ mit mindestens einer Konstante und eine Formel $A \in \boldsymbol{FO}(S)$, die erfüllbar ist, also ein Model $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ hat.

(1) [7 PUNKTE] Zeigen Sie: das Urbild $\doteq$ der Gleichheit auf D unter dem $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus $\mathcal{M}[\![-]\!]$ ist eine Kongruenzrelation auf der Menge $D_{\mathcal{H}}$ der variablenfreien Terme.

(2) [7 PUNKTE] Zeigen Sie, dass die Faktormenge $(D_{\mathcal{H}})_{\doteq}$ der Äquivalenzklassen bzgl. $\doteq$ auf kanonische Weise eine Interpretation der Funktionssymbole aus $\boldsymbol{Fun}$ zuläßt, so dass die Abbildung $D_{\mathcal{H}} \xrightarrow{q} (D_{\mathcal{H}})_{\doteq}$ zu einem $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus wird.

(3) [7 PUNKTE] Finden Sie eine Interpretation der Prädikatssymbole auf der Datenmenge $(D_{\mathcal{H}})_{\doteq}$, so dass jede in $\mathcal{N}$ erfüllbare Formel $A \in \boldsymbol{FO}(S)$ auch hier erfüllbar ist.

Abgabe bis Montag, 2018-07-08, 13:15, im Kasten neben IZ 343