Beispiel (Herbrand-Struktur):

Sei $A \equiv \forall x \forall y \forall z : p(a, f(y), g(z,x))$

über der Signatur $S = (\{a/_0, f/_1, g/_2\}, \{p/_3\})$

Dann ist

$$D_H = \{a, f(a), g(a,a), f(f(a)), f(g(a,a)),$$
$$g(a, f(a)), g(f(a), a), \dots\}$$

Ferner gilt

$$(I_H(g))(a, f(a)) = g(a, f(a)),$$

allgemein für $t_1, t_2 \in D_H$:

$$(I_H(g))(t_1, t_2) = g(t_1, t_2).$$

Die Interpretation der Prädikate ist noch zu wählen.

Zum Beispiel

$$(I_H(p))(t_1, t_2, t_3) := 1 \quad \text{gdw.} \quad g(t_1, t_2) \equiv g(t_2, f(t_3)).$$

Die Formel A gilt <u>nicht</u> in der so definierten Herbrand-Struktur H und unter Belegung σ mit

$$\sigma(x) = a = \sigma(y) = \sigma(z),$$

denn

$$H[\![p(a, f(y), g(z,x))]\!](\sigma)$$
$$= (I_H(p))(H[\![a]\!](\sigma), H[\![f(y)]\!](\sigma), H[\![g(z,x)]\!](\sigma))$$
$$= (I_H(p))(a, (I_H(f))(H[\![y]\!](\sigma)), (I_H(g))(H[\![z]\!](\sigma), H[\![x]\!](\sigma)))$$
$$= (I_H(p))(a, (I_H(f))(\sigma(y)), (I_H(g))(\sigma(z), \sigma(x)))$$
$$= (I_H(p))(a, (I_H(f))(a), (I_H(g))(a,a))$$
$$= (I_H(p))(a, f(a), g(a,a)) = 0.$$

Es gilt

$$(I_H(p))(a, f(a), g(a,a)) = 0,$$

denn

$$g(a, f(a)) \not\equiv g(f(a), f(g(a,a)))$$

Gegeben sei eine geschlossene Formel $A \in FO^{\neq}(S)$.
Eine Herbrand-Struktur H mit $H \models A$ heißt auch
<u>Herbrand-Modell</u> von A.

<u>Satz 4.29 (Herbrand)</u>
Sei $A \in FO^{\neq}(S)$ eine geschlossene Formel
in Skolemform
Dann
ist A erfüllbar gdw. A ein Herbrand-Modell hat.

<u>Beweis:</u>
„$\Leftarrow$" Jedes Herbrand-Modell ist auch ein Modell für A.
„$\Rightarrow$" Sei $M = (D_M, I_M)$ ein Modell für A.
Sei $H = (D_H, I_H)$ eine Herbrand-Struktur.
Die Interpretation der Prädikatsymbole $p/n \in Präd$
in H wird wie folgt festgelegt:

$$(I_H(p))(t_1, \ldots, t_n) := (I_M(p))(M[\![t_1]\!], \ldots, M[\![t_n]\!]).$$

Dabei sind $t_1, \ldots, t_n \in D_H$, also variablenfrei.
Damit lassen sich die Terme in M ohne Belegung auswerten.
<u>Was passiert hier?</u>
- Imitiere die Interpretation von p in M,
- wobei zunächst die Terme in M ausgewertet werden.

Behauptung: $\mathcal{H} \models \mathcal{A}$.

Zeige mit Induktion nach der Zahl der Allquantoren, dass für jede Formel B in Skolemnormalform gilt

$$\mathcal{M} \models B \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{H} \models B.$$

IA: ($n=0$) Für geschlossene Formeln $B \in FO^{\neq}(S)$ ohne Quantoren gilt unmittelbar

$$\mathcal{H}[\![B]\!] = \mathcal{M}[\![B]\!].$$

IS: Angenommen die Implikation gilt für Formeln B mit $n \in \mathbb{N}$ Allquantoren.

Betrachte

$$\forall x. B \quad \text{mit } n+1 \text{ Allquantoren.}$$

Da

$$\mathcal{M}[\![\forall x\, B]\!] = 1,$$

gilt $\mathcal{M}[\![B]\!](\{x/d\}) = 1$ für alle $d \in D_{\mathcal{M}}$.

Damit gilt insbesondere für

$$d = \mathcal{M}[\![t]\!] \quad \text{mit } t \in D_H,$$

dass

$$1 = \mathcal{M}[\![B]\!](\{x/\mathcal{M}[\![t]\!]\})$$

$$(\text{Substitutionslemma}) = \mathcal{M}[\![B\{x/t\}]\!].$$

Auf $B\{x/t\}$ ist nun die IV anwendbar und liefert

$$\mathcal{H}[\![B\{x/t\}]\!] = 1.$$

Eine erneute Anwendung des Substitutionslemmas gibt

$$
\begin{aligned}
& 1 \\
&= \mathcal{H}[\![B[x/t]]\!] \\
\text{(Substitutionslemma)} &= \mathcal{H}[\![B]\!](\{x / \mathcal{H}[\![t]\!]\}) \\
\text{(Definition } \mathcal{H}) &= \mathcal{H}[\![B]\!](\{x/t\}).
\end{aligned}
$$

Da $t \in D_{\mathcal{H}}$ beliebig gewählt war, folgt $\mathcal{H}[\![\forall x.\, B]\!] = 1$.

□