Lemma 4.16

Seien $A, B \in FO(S)$.
Dann gilt:

(8) $\neg \forall x A \models\mid \exists x \neg A$
$\neg \exists x A \models\mid \forall x \neg A$

(9) $\forall x A \wedge \forall x B \models\mid \forall x (A \wedge B)$
$\exists x A \vee \exists x B \models\mid \exists x (A \vee B)$

(10) $\forall x \forall y A \models\mid \forall y \forall x A$
$\exists x \exists y A \models\mid \exists y \exists x A$

(11) Falls $x \notin FV(B)$, dann gilt
$(Qx\, A)\ op\ B \models\mid Qx(A\ op\ B)$
mit $Q \in \{\forall, \exists\}$, $op \in \{\vee, \wedge\}$.

Beachte:
- (8), (9) und (11) ziehen Quantoren nach außen.
- Um (11) anwenden zu können, benenne Variable x um (weiter unten).

Vorsicht: Bei der Verwendung logischer Äquivalenzen muss man aufpassen:
$$\forall x A \vee \forall x B \not\models\mid \forall x (A \vee B)$$
$$\exists x A \wedge \exists x B \not\models\mid \exists x (A \wedge B).$$

Beispiel (Anwendung von Substitutionen):

$(\forall x. (iH(x) \wedge iF(y)))\{x/t, y/t'\}$

$z \neq x$, $z \neq y$ $= \forall z. ((iH(x) \wedge iF(y))\{x/z\}\{x/t, y/t'\})$

$z \notin V(t)$, $z \notin V(t')$ $= \forall z. ((iH(x)\{x/z\} \wedge iF(y)\{x/z\})\{x/t, y/t'\})$

$= \forall z. ((iH(z) \wedge iF(y))\{x/t, y/t'\})$

$= \forall z. (iH(z)\{x/t, y/t'\} \wedge iF(y)\{x/t, y/t'\})$

$= \forall z. (iH(z) \wedge iF(t'))$.

Beweis (Korollar 4.20(i)):

Zu zeigen:

Für jede Struktur $\mathcal{M}$ und jede Belegung $\sigma \in D^V$ gilt:

$$\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = 1.$$

Beweis:

Seien Struktur $\mathcal{M}$ und Belegung σ gegeben.

Dann

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) \\ \text{(Substitutionslemma)} &= \mathcal{M}[\![A]\!](\underbrace{\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}}_{=:\sigma'}) \\ \text{(A allgemeingültig)} &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

Beweis (Satz 4.25):

Induktion über den Aufbau von Formeln.

IA: Sei A atomar ($t_1 = t_2$ oder $p(t_1, \dots, t_n)$).

Dann ist A bereits bereinigt und in Pränexnormalform.

IS: Angenommen die Aussage gelte für A_1, A_2 mit

$$A_1 \models\!\mid \underbrace{Q_1 y_1 \dots Q_n y_n C_1}_{B_1}$$

$$A_2 \models\!\mid \underbrace{Q_1' y_1' \dots Q_m' y_m' C_2}_{B_2}$$

1. Fall: $\neg A_1$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \neg A_1 \\ \text{(IV + Kongruenz)} &\models\!\mid \neg Q_1 y_1 \dots Q_n y_n C_1 \\ \text{(Lemma 4.16(8))} &\models\!\mid \overline{Q_1} y_1 \dots \overline{Q_n} y_n \neg C_1, \end{aligned}$$

wobei $\overline{Q_i} := \begin{cases} \forall, & \text{falls } Q_i = \exists \\ \exists, & \text{falls } Q_i = \forall. \end{cases}$

2. Fall: A_1 op A_2 mit op $\in \{\wedge, \vee\}$

Es gilt

$$A_1 \text{ op } A_2$$

(IV + Kongruenz) $\models\mid Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n C_1 \text{ op } Q_1' y_1' \ldots Q_m' y_m' C_2$

(Gesundene Umbenennung, frisch) $\models\mid Q_1 z_1 \ldots Q_n z_n \tilde{C}_1 \text{ op } Q_1' y_1' \ldots Q_m' y_m' C_2$

(Lemma 4.16(11)) $\models\mid Q_1 z_1 \ldots Q_n z_n (\tilde{C}_1 \text{ op } Q_1' y_1' \ldots Q_m' y_m' C_2)$

(Gesundene Umbenennung, frisch) $\models\mid Q_1 z_1 \ldots Q_n z_n (\tilde{C}_1 \text{ op } Q_1' z_1' \ldots Q_m' z_m' \tilde{C}_2)$

(Lemma 4.16(11)) $\models\mid Q_1 z_1 \ldots Q_n z_n Q_1' z_1' \ldots Q_m' z_m' (\tilde{C}_1 \text{ op } \tilde{C}_2)$.

3. Fall: $Qx\, A_1$

Gesundene Umbenennung

$$Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n C_1$$
$$\models\mid Q_1 z_1 \ldots Q_n z_n \tilde{C}_1 \quad \text{mit } x \notin \{z_1, \ldots, z_n\}.$$

Dann

$$Qx\, A_1 \models\mid Qx Q_1 z_1 \ldots Q_n z_n \tilde{C}_1. \qquad \square$$

Beispiel (Skolemform):

Betrachte $\exists x \forall y \exists z \forall u \exists v.\, p(x, y, z, u, v)$

Die while-Schleife erzeugt in den einzelnen Durchläufen folgende Formeln:

$$\forall y \exists z \forall u \exists v.\, p(f, y, z, u, v) \quad \text{mit } f/_0 \in Sko$$
$$\forall y \forall u \exists v.\, p(f, y, g(y), u, v) \quad \text{mit } g/_1 \in Sko$$
$$\forall y \forall u.\, p(f, y, g(y), u, h(y,u)) \quad \text{mit } h/_2 \in Sko.$$

Beweis (Satz von Skolem):

Zeige für jede in der Schleife durchgeführte Umformung

$$A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n \exists z. B \quad \text{ist erfüllbar}$$

gdw.

$$A' \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\} \text{ ist erfüllbar,}$$

wobei f/n ein frisches Funktionssymbol außerhalb Signatur S ist.

„$\Leftarrow$" Angenommen A' ist erfüllbar.

Dann gibt es eine Struktur $M = (D, I)$

und eine Belegung σ mit

$$M[\![\forall y_1 \dots \forall y_n B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\}]\!](\sigma) = 1.$$

Das heißt, für alle $d_1, \dots, d_n \in D$ gilt

$$M[\![B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\}]\!](\sigma') = 1,$$

wobei $\sigma' := \sigma\{y_1/d_1, \dots, y_n/d_n\}$.

Mit dem Substitutionslemma folgt

$$M[\![B]\!](\sigma'\{z / M[\![f(y_1, \dots, y_n)]\!](\sigma')\}) = 1.$$

Das heißt, für alle $d_1, \dots, d_n \in D$ gibt es

$$d = M[\![f(y_1, \dots, y_n)]\!](\sigma')$$

mit

$$M[\![B]\!](\sigma\{y_1/d_1, \dots, y_n/d_n, z/d\}) = 1.$$

Also

$$M[\![\forall y_1 \dots \forall y_n \exists z B]\!] = 1.$$

„$\Rightarrow$" Angenommen A ist erfüllbar.

Dann gibt es $\mathcal{M} = (D, I)$ und σ mit

$$\mathcal{M}[\![A]\!](\sigma) = 1.$$

Das heißt, für alle $d_1, \dots, d_n \in D$

gibt es $d \in D$ mit

$$\mathcal{M}[\![B]\!](\sigma\{y_1/d_1, \dots, y_n/d_n, z/d\}) = 1.$$

Definiere nun eine neue Struktur $\mathcal{M}' = (D, I')$

zu Signatur $\Sigma \uplus \Sigma_{Sko}$,

die mit $\mathcal{M}$ übereinstimmt,

aber für Funktionssymbol f definiert:

$$I'(f)(d_1, \dots, d_n) := d.$$

Mit dieser Definition gilt für alle $d_1, \dots, d_n \in D$:

$$\mathcal{M}'[\![B]\!](\sigma'\{z/\mathcal{M}'[\![f(y_1, \dots, y_n)]\!](\sigma')\}) = 1,$$

wobei $\sigma' := \sigma\{y_1/d_1, \dots, y_n/d_n\}$.

Mit dem Substitutionslemma folgt wiederum für alle $d_1, \dots, d_n \in D$:

$$\mathcal{M}'[\![B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\}]\!](\sigma') = 1.$$

Also

$$\mathcal{M}'[\![\forall y_1 \dots \forall y_n\, B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\}]\!](\sigma) = 1. \qquad \square$$

<u>Beachte</u>:

Die Existenz von

$$I'(f) : D^n \to D$$

ist das <u>Auswahlaxiom</u>:

Für jede Menge X von Mengen

gibt es eine Funktion $f : X \to \bigcup_{A \in X} A$,

so dass $f(A) \in A$.

Hier:

$$X = \{ \underbrace{A_{d_0,d_0,d_0}}_{\substack{d \text{ für} \\ d_0,\, d_0,\, d_0}} ,\ A_{d_0,d_0,d_1}, \ldots \}$$