Einführung in die Logik
Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Prof. Dr. Roland Meyer, Dr. Jürgen Koslowski

2018-07-01

Wir empfehlen Ihnen, diese Aufgaben zur Vorbereitung auf die Abschlussklausur zu bearbeiten. Die Lösungen werden im Rahmen einer Fragestunde vorgestellt. Der Termin hierzu wird rechtzeitig auf der Vorlesungswebsite bekanntgegeben.

Aufgabe 1

Wir betrachten die aussagenlogische Formel $F \equiv ((\neg p \vee \neg q) \to r) \vee \neg(p \to q)$.

(1) Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf.

(2) Handelt es sich um eine Tautologie? Ist die Formel erfüllbar? Geben Sie eine kurze Begründung.

(3) Bestimmen Sie möglichst direkt eine kanonische konjunktive Normalform (kKNF) von F .

Aufgabe 2

Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit folgender Formeln mit der Tableau-Methode:

(1) $\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$

(2) $(p \to (q \wedge r)) \wedge ((r \to \neg q) \wedge p)$

Aufgabe 3

(1) Verwenden Sie das Substitutionslemma

$$\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![A]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big)$$

um daraus Korollar 4.20(1) zu folgern:

$$\text{Ist } A \in \boldsymbol{FO}(S) \text{ allgemeingültig, dann auch } A\{x/t\} .$$

(2) Beweisen Sie die semantische Kontrapositionsregel der Prädikatenlogik:

$$\Gamma, A \models \neg B \qquad \text{gdw} \qquad \Gamma, B \models \neg A$$

(3) Geben Sie eine allgemeingültige Formel an (mit Begründung), die nicht mehr allgemeingültig ist, wenn man S-Strukturen mit leerem Datenbereich erlaubt.

Aufgabe 4

Zeigen oder widerlegen Sie:

(1) Jede Formel in Prenex-Normalform ist automatisch bereinigt.

(2) $\{\forall x \, \neg A, \forall y \, A\}$ ist unerfüllbar.

(3) Der Algorithmus zur Skolemisierung ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Existenzquantoren eliminiert werden.

(4) Für jede prädikatenlogische Formel kann man eine äquivalente Formel finden, die mit dem Symbol $\forall$ beginnt.

Aufgabe 5

(1) Betrachte aussagenlogische Formeln A, B, C. Dabei sei A eine Tautologie, B erfüllbar, aber keine Tautologie, und C unerfüllbar.

Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr (W) oder falsch (F) sind:

- $\neg A$ ist unerfüllbar.
- $A \to C$ ist unerfüllbar.
- $B \leftrightarrow C$ ist unerfüllbar.
- $B \to A$ ist eine Tautologie.
- $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$ ist eine Tautologie.

(2) Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr (W) oder falsch (F) sind:

- Für jede Formel A in KNF und für jede Klausel K folgt aus $A \models K$ auch $A \vdash_{\mathrm{Res}} K$.
- Die Tableau-Methode liefert für jede erfüllbare aussagenlogische Formel in endlicher Zeit eine erfüllende Belegung.
- Die Tableau-Methode liefert für jede erfüllbare aufzählbare Menge Σ aussagenlogischer Formeln in endlicher Zeit eine erfüllende Belegung.
- Für eine unerfüllbare prädikatenlogische Formel A in Prenex-Normalform, deren quantorenfreier Teil in KNF vorliegt, kann mit Hilfe der Resolutionsmethode in endlicher Zeit nachgewiesen werden, dass A nicht erfüllbar ist.
- Für jede Signatur S, jede Menge $\Sigma \subseteq \boldsymbol{FO}_{\mathrm{abg}}(S)$ abgeschlossener Formeln und jede Formel $A \in \boldsymbol{FO}_{\mathrm{abg}}(S)$ kann in endlicher Zeit entschieden werden, ob $\Sigma \models A$ gilt.

Aufgabe 6

Weisen Sie im System $\mathcal{F}_0$ nach:

(1) $q, r \to \neg q \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

(2) $p \to (\neg q \to r), (\neg q \to r) \to p \to \neg q), \neg r \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$

Sie dürfen dabei alle Lemmata und Beispiele der Vorlesung und der Aufgabenblätter verwenden, ebenso das Deduktionstheorem und die Inkonsistenzregel, aber nicht die Vollständigkeit des Kalküls $\mathcal{F}_0$.

Aufgabe 7

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Junktorenmenge $\{\neg, \leftrightarrow\}$ nicht vollständig ist.

Sei $\mathcal{V}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen. Für eine feste Variable $q \in \mathcal{V}$ definieren wir zu einer Belegung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ die modifizierte Belegung φ_q wie folgt:

$$\varphi_q(p) := \begin{cases} 1 - \varphi(p) & \text{falls } p = q \text{ ,} \\ \varphi(p) & \text{sonst .} \end{cases}$$

Wir nennen eine aussagenlogische Formel A q-*stabil*, wenn für alle Belegungen φ gilt $\varphi(A) = \varphi_q(A)$, und q-*instabil*, wenn für alle Belegungen φ gilt $\varphi(A) \neq \varphi_q(A)$.

(1) Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass jede Formel in den Junktoren $\neg$ und $\leftrightarrow$ entweder q-stabil oder q-instabil ist.

(2) Geben Sie eine aussagenlogische Formel B an, die weder q-stabil noch q-instabil ist. Begründen Sie, dass Ihre Formel die gewünschte Eigenschaft hat. Schließen Sie daraus, dass $\{\neg, \leftrightarrow\}$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 8

S bestehe aus einem 2-stelligen Prädikatssymbol R.

Gegeben sei die Formel $\forall x : \exists y : \exists z : (R(x,y) \wedge R(z,y) \wedge (R(x,z) \rightarrow R(z,x)))$. In welcher der folgenden S-Strukturen $\mathcal{M}_i$ mit Datenbereich $D_i = \mathbb{N}$ gilt sie?

$$R^0 = \{\langle m,n \rangle \,:\, m < n\} \quad , \quad R^1 = \{\langle m, m+m \rangle \,:\, m \in \mathbb{N}\} \quad , \quad R^2 = \{\langle m,n \rangle \,:\, m < n+1\}$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 9

S bestehe aus einem 2-stelligen Prädikatssymbol R.

Konstruieren Sie eine Formel A mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt unendlich viele endliche S-Strukturen, die A erfüllen;
- Jede dieser endlichen Strukturen hat eine gerade Anzahl von Elementen.

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort.

Aufgabe 10

Wir betrachten die Resolutionsmethode für Horn-Formeln, d.h. Formeln in KNF, deren Klauseln maximal ein positives Literal enthalten. Nichtleere Klauseln ohne negative Literale heißen *Tatsachen.*

Entwerfen Sie Regeln, mit deren Hilfe sich die Resolutionsmethode bei Horn-Formeln vereinfachen lässt. Betrachten Sie dazu folgende Problemstellungen:

- Unter welchen Bedingungen an A lässt sich die Erfüllbarkeit von A direkt feststellen, auch ohne Anwendung der Resolutionsmethode?
- Welche Arten von Resolventen braucht man nicht zu bilden, da sie nichts zur Entscheidungsfindung hinsichtlich der Erfüllbarkeit von A beitragen?

Aufgabe 11

(1) Wir betrachten eine prädikatenlogische Formel A mit $x \notin \mathrm{Frei}(A)$. Welche der folgenden Formeln sind zueinander äquivalent und warum?

  (a) $\forall x : \exists y\, A$

  (b) $\exists y\, A$

  (c) $\exists y : \forall x\, A$

(2) Welche Implikationen gelten zwischen den folgenden Aussagen:

  (a) $\Gamma \cup \{\neg A\}$ ist nicht erfüllbar;

  (b) $\Gamma \cup \{A\}$ ist erfüllbar;

  (c) $\Gamma \models A$

  (d) $\Gamma \vdash A$

  Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 12

Sie wollen die Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit quadratischen Kacheln der Kantenklänge 1 kacheln.

Nehmen Sie an, dass eine endliche Mengen von Farben $C = \{c_1, \dots c_n\}$ und eine endliche Menge von Farbmustern $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ gegeben sind. Jedes Farbmuster $m_i \in M$ ist spezifziert durch die Farben der vier Kanten $m_i^{\text{oben}}, m_i^{\text{unten}}, m_i^{\text{links}}, m_i^{\text{rechts}} \in C$.

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Ebene ist *kachelbar*, wenn man sie vollständig mit Kacheln überdecken kann, so dass der Mittelpunkt jeder Kachel auf einem Gitterpunkt aus X zu liegen kommt und zwei benachbarte Kacheln eine vollständige gemeinsame Kante haben. Desweiteren sollen die Farben entlang benachbarter Kachelkanten übereinstimmen.

Sei beispielsweise m_1 das Muster der Kachel an Stelle $(0, 0)$ und m_2 das Muster der Kachel an Stelle $(1, 0)$. Damit eine valide Kachelung entstehen kann, muss $m_1^{\text{rechts}} = m_2^{\text{links}}$ gelten.

Zeigen Sie: Die gesamte Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist kachelbar, genau dann, wenn jeder endliche Ausschnitt $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kachelbar ist.

Hinweis: Geben Sie für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine aussagenlogische Formel $A_{x,y}$ an, die beschreibt, dass die Kachel an diesem Punkt mit ihren Nachbarn kompatibel ist. Verwenden Sie dann den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.