Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 0, 2019-04-17

Präsenzaufgabe 1

Definieren Sie Operationen $\overline{\wedge}$, $\overline{\vee}$, $\overline{\Rightarrow}$, $\overline{\Leftrightarrow}$, $\overline{\neg}$, $\overline{\top}$ und $\overline{\bot}$ passender Stelligkeit auf der Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$, bzgl. derer die Abbildung $\widehat{\varphi}^{(f)}$ des Rekursionstheorems 1.1.9 ein Homomorphismus ist.

Exemplarisch für einen binären Junktor $\star$ bedeutet das

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}[\mathcal{A}] \times \mathcal{F}[\mathcal{A}] \arrow[r, "\widehat{\varphi} \times \widehat{\varphi}"] \arrow[d, "\overline{\star}"'] & \mathbb{B} \times \mathbb{B} \arrow[d, "f_\star"] \\
\mathcal{F}[\mathcal{A}] \arrow[r, "\widehat{\varphi}"'] & \mathbb{B}
\end{tikzcd}
$$

bzw.

$$f_\star\left(\widehat{\varphi}(A), \widehat{\varphi}(B)\right) = \widehat{\varphi}\left(\overline{\star}(A, B)\right)$$

für alle $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$.

Lösungsvorschlag:

Im obigen binären Fall fordert das Rekursionstheorem

$$f_\star\left(\widehat{\varphi}(A), \widehat{\varphi}(B)\right) = \widehat{\varphi}(A \star B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$.

Insofern bleibt uns gar nichts anderes übrig, als für einen binären Junktor $\star$ zu setzen

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}] \times \mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\overline{\star}} \mathcal{F}[\mathcal{A}] \qquad , \qquad \langle A, B \rangle \longmapsto (\!(A \star B)\!)$$

Im Fall der unären Negation $\neg$ setzen wir

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}] \xrightarrow{\overline{\neg}} \mathcal{F}[\mathcal{A}] \qquad , \qquad A \longmapsto (\!(\neg A)\!)$$

Im Fall einer Konstanten κ setzen wir

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\overline{\kappa}} \mathcal{F}[\mathcal{A}] \qquad , \qquad \bullet \longmapsto (\!(\kappa)\!)$$

Man beachte, dass die Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]^0$ aller 0-Tupel genau ein Element hat, und dass eine Abbildung von einer ein-elementigen Menge nach $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ genau ein Element von $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ auswählt.

In Zukunft werden wir die Querstriche über den Junktor-Symbolen fortlassen und sie je nach Kontext als Junktoren bzw. als Operatoren auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ auffassen.

[Technisch handelt es sich bei $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ im die sog. *Term-Algebra* oder auch *freie Algebra* über der Menge $\mathcal{A}$ bzgl. der durch $\mathcal{J}$ spezifizierten *Signatur*. Diese Begriffsbildung wird uns in der Prädikatenlogik wieder begegnen.]

Präsenzaufgabe 2

Übungsaufgabe 1.2.9 aus dem neuen Skript: Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit folgender Formeln, die in Kürze für uns wichtig werden werden:

- $B \to (A \to B)$;
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to b) \to (A \to C))$;
- $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

Lösungsvorschlag:

Mittels Wahrheitstabellen; hoffentlich lassen sich die Übungsteilnehmer zur aktiven Beteiligung verleiten.

Präsenzaufgabe 3

Weisen Sie nach, dass die Teilbarkeitsrelation $|$ ($n|m$ bedeutet n teilt m) eine Halbordnung auf der Menge $I\!N = \{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen ist.

Untersuchen Sie $\langle I\!N, |\rangle$ darauf, ob es sich um einen *Verband* handelt, d.h., ob je endlich viele Zahlen eine größte untere Schranke und eine kleinste obere Schranke besitzen. Hat die leere Menge derartige Schranken, und wenn ja, welche? (Der Begriff der unteren/oberen Schranken ist in Aufgabe 6 erläutert.)

Lösungsvorschlag:

In dieser VL ist 0 eine natürliche Zahl!

„ n teilt m “ bedeutet, dass eine natürliche Zahl k mit $n \cdot k = m$ existiert.

Man überzeugt sich unschwer davon, dass die Teilbarkeitsrelation reflexiv, transitiv und asymmetrisch ist, es sich also um eine Halbordung auf $I\!N$ handelt.

$x \in I\!N$ ist untere Schranke von $A \subseteq I\!N$, sofern x jedes Element von A teilt. Im Fall $|A| = 2$, etwa $A = \{a_0, a_1\}$, teilt x damit auch $\mathrm{ggT}\{a_0, a_1\}$, was folglich die größte untere Schranke von a_0 und a_1 ist. Bei größeren endlichen Mengen kann man die Konstruktion des binären ggT iterieren:

Genauer: die endliche Menge A werde *irgendwie* wiederholungsfrei durchnummeriert $A = \{\, a_i : i < n \,\}$; dann bildet man

$$\begin{aligned} g_0 &:= a_0 \\ g_{k+1} &:= \mathrm{ggT}(g_k, a_{k+1}) \quad \text{für} \quad k < n-1 \end{aligned}$$

Behauptung: $g := g_{n-1}$ ist der ggT der Menge A .

Aufgrund der Transitivität der Teilbarkeitsrelation $|$ ist g ein gemeinsamer Teiler aller Elemente von A .

Betrachte einen weiteren gemeinsamen Teiler h . Nach Konstruktion der g_i , $i > n$, gilt $h|g_0$ und folglich $h|g_{k+1}$ für $k < n-1$, insbesondere also $h|g$.

Falls $A = \emptyset$, ist jedes Element von $I\!N$ eine untere Schranke von A , die größte solche ist diejenige Zahl, die von allen natürlichen Zahlen geteilt wird, also 0 , denn $n \cdot 0 = 0$ (das mag für manche überraschend sein).

Dagegen ist $y \in I\!N$ obere Schranke von A , wenn es sich bei y um ein Vielfaches aller Elemente in a handelt. Eine kleinste obere Schranke ist also ein kleinstes gemeinsames Vielfaches. Auch der Begriff kgV läßt sich von zwei-elementigen auf größere endliche Mengen durch Iteration verallgemeinern, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Falls $A = \emptyset$, suchen wir ein bzgl. $|$ kleinstes Element, d.h., eine natürliche Zahl, die alle natürlichen Zahlen teilt. In der Tat hat 1 diese Eigenschaft.

Hausaufgabe 4 [16 PUNKTE]

(a) [3 PUNKTE] Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie den Wert

$$\widehat{\varphi}(\neg(p \wedge q) \to r)$$

schrittweise gemäß der Definition.

(b) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \to (r \to (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

(c) [3 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \to p \models p \to q$ gilt.

(d) [5 PUNKTE] Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \;\models\!\mid\; \neg(p \wedge q)$, wobei $A \models\!\mid B$ abkürzend für $A \models B$ und $B \models A$ steht.

Hausaufgabe 5 [13 PUNKTE]

(1) [5 PUNKTE] Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 1.1.5 im neuen Skript: Wenn $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ als Verkettung XY zweier nichtleerer Zeichenreichen geschreiben wird, so gilt $\delta(X) > 0$ und $\delta(Y) < 0$ (δ bestimmt die Differenz zwischen der Anzahl öffnender und schließender Klammern, vergl. Lemma 1.1.4). Es fehlen noch die Fälle der unären und nullären Junktoren.

(2) [4 PUNKTE] Zeigen oder widerlegen Sie: ist A eine Formel mit k Junktoren, so gilt $|A| \leq 5k + 1$, wobei $|A|$ die Anzahl aller Zeichen in A ist, einschließlich aller Klammern.

(3) [4 PUNKTE] Wir definieren die *Baumtiefe* einer Formel A durch

- ▷ $t(A) = 0$, falls A atomar oder eine Konstante ist;
- ▷ $t(\neg B) = t(B) + 1$
- ▷ $t(B \star C) = \max\{t(B), t(C)\} + 1$, falls $\star$ binär ist.

Zeigen oder widerlegen Sie: $|A| \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Hausaufgabe 6 [19 PUNKTE]

Gegeben sei eine quasi-geordnete Menge $\langle X, \sqsubseteq \rangle$.

- $a \in X$ heißt *untere Schranke* von $U \subseteq X$, wenn $a \sqsubseteq u$ für jedes $u \in U$ gilt, abkürzende Schreibweise $a \sqsubseteq U$.
- Die Menge $\{\, a \in X \,:\, a \sqsubseteq U \,\}$ aller unteren Schranken von U bezeichnen wir mit $U^{\downarrow}$.
- *Obere Schranken* sind dual definiert; $U^{\uparrow}$ ist die Menge der oberen Schranken von U.

Zeigen Sie:

(1) [5 PUNKTE] Die Abbildung $U \longmapsto U^{\downarrow\uparrow}$ ist ein Hüllenoperator auf der Potenzmenge $P(X)$, vergl. Lemma 1.2.15 im neuen Skript.

(2) [8 PUNKTE] Im Fall $X = \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ und der Quasi-Ordnung

$$A \sqsubseteq B \qquad \text{gdw.} \qquad \widehat{\varphi}(A) \leq \widehat{\varphi}(B) \quad \text{für alle Belegungen} \quad \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}$$

- stimmt die Hüllenoperatoren $(-)^{\models}$ und $(-)^{\downarrow\uparrow}$ überein;
- ist $\langle \mathcal{F}[\mathcal{A}], \sqsubseteq \rangle$ ein Verband (vergl. Aufgabe 2).

(3) [6 PUNKTE] Insbesondere läßt sich unter den Voraussetzungen von (2) dann die logische Folgerung $\Gamma \models A$ äquivalent ausdrücken durch

$$\Gamma^{\downarrow} \subseteq \{A\}^{\downarrow} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma^{\downarrow\uparrow} \supseteq \{A\}^{\uparrow} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma^{\downarrow\uparrow} \cap \{A\}^{\downarrow} \neq \emptyset$$

(Die letzte Variante gibt einen Hinweis darauf, wie die logische Folgerung zu einer Relation zwischen Formelmengen erweitert werden kann: $\Gamma \models \Delta$ gdw. $\Gamma^{\downarrow\uparrow} \cap \Delta^{\uparrow\downarrow} \neq \emptyset$.)

Abgabe bis Dienstag, 2019-04-23, 13:15, im Kasten neben IZ 343