Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 1, 2019-04-29

Hausaufgabe 1 [15 PUNKTE]

Wir haben $\models$ als Relation zwischen Formelmengen Γ Formeln A eingeführt. Natürlich kann man $\models$ auch als Relation zwischen Formlen betrachten, indem man die Menge Γ auf Singletons beschränkt.

(1) [3 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\models$ als Relation auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ eine Quasi-Ordnung, aber keine Halb-Ordnung ist.

(2) [5 PUNKTE] Zeigen Sie, dass der Durchschnitt einer Quasi-Ordnung $\sqsubseteq$ auf einer Menge X mit ihrer dualen Relation

$$\sqsupseteq \; = \; \sqsubseteq^{\mathrm{op}} = \{ \langle y, x \rangle \in X \times X \,:\, x \sqsubseteq y \}$$

eine Äquivalenzrelation ist.

(3) Im Spezialfall der Quasi-Ordnung $\models$ auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ wollen wir die entsprechende Äquivalenzrelation mit $\models\!\!|$ bezeichnen. (Achtung: wir werden diese Relation nie auf Formelmengen anwenden!) Untersuchen Sie in folgenden Fällen,ob die angegebenen Formeln äquivalent sind (beachten Sie die Klammervereinfachungsregeln):

- [2 PUNKTE] $A \wedge B$ sowie $B \wedge A$;
- [3 PUNKTE] $\neg(A \wedge B)$ sowie $\neg A \vee \neg B$;
- [3 PUNKTE] $A \to B$ sowie $\neg A \vee B$;
- [3 PUNKTE] $A \wedge B \wedge C$ sowie $(A \wedge B) \wedge C$;
- [3 PUNKTE] $A \to B \to C$ sowie $(A \to B) \to C$.

Hausaufgabe 2 [15 PUNKTE]

Die ursprüngliche Junktorenmenge $\mathcal{J}$ ist redundant; wie wir in der vorangegangenen Aufgabe gesehen haben, lassen sich etwa die Junktoren $\wedge$ und $\to$ mit Hilfe von $\neg$ und $\vee$ ausdrücken.

Terminologie: eine Junktormenge $\mathcal{J}'$ mit gegebener Semantik (d.h., vorgegebenen Wahrheitstabellen für jeden Junktor in $\mathcal{J}'$) heißt *vollständig*, wenn zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ eine äquivalente Formel $B \in \mathcal{F}'[\mathcal{A}]$ existiert, und umgekehrt.

(1) [5 PUNKTE] Zeigen Sie mittels stuktureller Induktion: $\mathcal{J}' = \{\neg, \vee\}$ ist vollständig.

(2) [3 PUNKTE] Zeigen Sie, dass $\{\wedge, \vee\}$ nicht vollständig ist. Hinweis, finden Sie einen Junktor in $\mathcal{J}$, der nicht durch $\wedge$ und $\vee$ ausgedrückt werden kann.

(3) [6 PUNKTE] Stellen Sie fest, welche beiden der 16 möglichen binären Junktoren die Eigenschaft haben, dass die entsprechende 1-elementige Junktormenge vollständig ist.

Hausaufgabe 3 [15 PUNKTE]

Untersuchen Sie die nicht-konstanten Junktoren aus $\mathcal{J}$ daraufhin, inwieweit die entsprechenden Operationen auf $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ die Quasi-Ordnung $\models$ erhalten. Exemplarisch stellt sich etwa die Frage, ob $A \models B$ und $A' \models B'$ auch $A \wedge A' \models B \wedge B'$ impliziert.

Hinweis: es kann hilfreich sein, neben der durch $\models$ quasi-geordneten Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ auch die dual geordnete Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]^{\mathrm{op}}$ zu betrachten.

Hausaufgabe 4 [20 PUNKTE]

Der berühmte *Vierfarbensatz* besagt, dass auf einem Globus mit endlich viele zusammenhängenden Ländern deren Gebiete derart mit maximal vier Farben eingefärbt werden können, dass Gebiete benachbarte Länder stets unterschiedliche Farben haben. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes oder einer Folgerung daraus, dass der Vierfarbensatz auch für Globen mit unendlich vielen Ländern gilt.

Zur Terminologie: Ein Land heißt *zusammenhängend*, wenn man je zwei seiner Punkte durch einen Weg (auf der Erd-Oberfläche) verbinden kann, der innderhalb des Landes verläuft. Damit sind Inseln (Sylt) oder Exklaven (Kaliningrad) verboten[1] Zwei Länder heißen *benachbart*, wenn sie ein gemeinsames Stück Grenze haben, das keine *Ecke* ist. Ecken sind Punkte auf dem Erdball, die zu drei oder mehr Ländern gehören (etwa Four Corners in den USA, wo Arizona, Colorado, New Mexico und Utah zusammentreffen; Arizona und Colorado sind nicht benachbart, ebensowenig Utah und New Mexico).

Meist übersetzet man das obige Problem in eins über *ungerichtete planare Graphen*: also eine Menge V sog. „Knoten“ (= Hauptstädte der Länder), realisiert als Punkte auf dem Globus oder in der Ebene, und einer Teilmenge $E \subseteq V \times V$ sog. „Kanten“ (= Autobahnen zwischen den Hauptstädten benachbarter Länder, die die Grenze genau einmal überqueren), realisiert als stetige Kurven auf den Globus zwischen den Knoten, die sich außerhalb dieser Endpunkte nicht schneiden (*Planarität*).

(a) [2 PUNKTE] Was bedeutet die 4-Färbbarkeit einer Landkarte für den zugehörigen planaren Graphen?

(b) [4 PUNKTE] Genügen vier Farben auch, wenn man in der Graphentheoretischen Version auf die Forderung nach Planarität verzichtet, d.h., wenn sich die Kanten bei der Einbettung in die Kugeloberfläche auch schneiden dürfen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) [10 PUNKTE] Konstruieren Sie für einen gegebenen Graphen $G = \langle V, E \rangle$ mit Hilfe atomarer Formeln der Form $C_{u,j}$, die die möglichen Färbungen $j < 4$ eines jeden Knoten $u \in V$ ausdrücken, eine Formelmenge Γ, die genau dann erfüllbar ist, wenn G 4-färbbar ist.

(d) [4 PUNKTE] Zeigen Sie, dass auch jeder unendliche planare Graph mit vier Farben gefärbt werden kann.

Abgabe bis Dienstag, 2019-05-07, 13:15, im Kasten neben IZ 343

[1] Ein Land mit m Zusammenhangskomponenten nennt man auch m-*Pire*; hier sind wir nur an 1-Pires interessiert.