



## Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 1, 2019-05-12

### Hausaufgabe 1 [24 PUNKTE]

- [5 PUNKTE] Geben Sie im deduktiven System  $\mathcal{K}_{Ar}$  eine explizite Herleitung für -42 an.
- [5 PUNKTE] Geben Sie im deduktiven System  $\mathcal{K}_{Ar}$  einen Herleitungsbaum für 83 an. Hinweis: Sie dürfen auf bekannte Teilbäume zurückgreifen und müssen nicht alle Knoten explizit aufzeichnen.
- [8 PUNKTE] Weisen Sie nach, dass jedes deduktive System  $\mathcal{K}$  vermöge

$$\Gamma^{+\mathcal{K}} := \{A \in \mathcal{F} : \Gamma \vdash_{\mathcal{K}} A\}$$

einen Hüllenoperator definiert.

- [6 PUNKTE] Beweisen Sie den syntaktischen Kompaktheitssatz:  $A \in \mathcal{F}$  ist aus  $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$  genau dann ableitbar, wenn  $A$  bereits aus einer endlichen Teilmenge  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  ableitbar ist.

### Hausaufgabe 2 [24 PUNKTE]

- [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass im deduktiven System  $\mathcal{K}_0$  die durch Ax1, Ax2 und Ax3 beschriebenen Formelmengen disjunkt sind.
- [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass  $\mathcal{K}_0$  im folgenden Sinne *korrekt* ist: alle Theoreme von  $\mathcal{K}_0$  sind Tautologien. Hinweis: Beachten Sie Präsenzaufgabe 2 von Blatt 0.
- Eine Formelmenge heißt *widersprüchlich* oder *inkonsistent*, falls es eine Formel  $B$  gibt mit  $\Gamma \vdash B$  und  $\Gamma \vdash \neg B$ . Zeigen Sie:
  - [6 PUNKTE]  $\Gamma$  ist genau dann widersprüchlich, wenn  $\Gamma$  eine endliche widersprüchliche Teilmenge besitzt;
  - [6 PUNKTE]  $\Gamma \vdash \neg A$  gilt genau dann wenn  $\Gamma \cup \{A\}$  widersprüchlich ist.

### Hausaufgabe 3 [16 PUNKTE]

Bestimmen sie explizite Ableitungen von

- [8 PUNKTE]  $(A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash B \rightarrow C$
- [8 PUNKTE]  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$

### Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Wir modifizieren  $\mathcal{K}_0$ , indem wir Schema Ax3 aus  $\mathcal{R}_0$  entfernen, und stattdessen die Schemata

$$\frac{}{\neg\neg A \rightarrow A} \text{ (Th2)} \quad \text{sowie} \quad \frac{}{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A} \text{ (Th7)}$$

hinzufügen. Zeigen Sie, dass auch der resultierende Kalkül  $\mathcal{K}'_0$  vollständig und korrekt ist.

**Abgabe bis Dienstag, 2019-05-21, 13:15, im Kasten neben IZ 343**