



Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 3, 2019-05-28

Hausaufgabe 1 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie in \mathcal{K}_0 ::

- (1) [5 PUNKTE] $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
- (2) [7 PUNKTE] $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ (Peirce's Law)

Hausaufgabe 2 [16 PUNKTE]

\mathcal{K}_0 wird mit Hilfe der folgenden Axiomschemata um den Junktor \wedge erweitert zu \mathcal{K}_\wedge :

$$\frac{}{A \wedge B \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)} \quad (\wedge \rightarrow) \quad \text{und} \quad \frac{}{\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \wedge B} \quad (\rightarrow \wedge)$$

Als Beispiel leiten wir unter Einsatz des Deduktionstheorems $A \wedge B \rightarrow A$ her:

0.	$A \wedge B$	Ann.
1.	$A \wedge B \rightarrow \neg(a \rightarrow \neg B)$	$(\wedge \rightarrow)$
2.	$\neg(a \rightarrow \neg B)$	MP, 0,1
3.	A	Ann.
4.	$\neg A \rightarrow A \rightarrow \neg B$	Th3
5.	$A \rightarrow \neg B$	MP, 3,4
6.	$\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$	Th3
7.	$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A$	MP, 2,6
8.	A	MP, 5,7
9.	$\neg A \rightarrow A$	DT 3-8
10.	$\neg A \rightarrow \neg A$	\neg Th1
11.	$(\neg A \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A$	Th7
12.	$(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg A$	MP, 9,11
13.	$\neg \neg A$	MP, 10,12
14.	$\neg \neg A \rightarrow A$	Th2
15.	A	MP, 13, 14
16.	$A \wedge B \rightarrow A$	DT, 0-15

Zeigen Sie:

- [8 PUNKTE] $\vdash_{\mathcal{K}_\wedge} A \wedge B \rightarrow B$
- [8 PUNKTE] $\vdash_{\mathcal{K}_\wedge} A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$

Hausaufgabe 3 [12 PUNKTE]

Überprüfen Sie der Erfüllbarkeit mit der Tableau-Methode:

- (1) [6 PUNKTE] $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$
- (2) [6 PUNKTE] $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((r \rightarrow \neg q) \wedge p)$

Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Definition: Die Teilmenge $\text{NNF} \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ ist induktiv wie folgt definiert:

- NNF enthält alle Literale;
- mit $A, B \in \text{NNF}$ gehören auch $(A \wedge B)$ sowie $(A \vee B)$ zu NNF .

Inbesondere treten in NNF -Formeln nur die Junktoren \neg , \wedge und \vee auf.

[10 PUNKTE] Zeigen Sie: Zu jeder Formel $A \in \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ existierte eine Formel $B \in \text{NNF}$ mit $A \models B$ und $|B| \in \mathcal{O}(|A|)$, d.h., die Länge von B hängt bis auf additive Konstanten linear von der Länge von A ab.