Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 5, 2019-07-03

Diese Blatt ist optional, aber WICHTIG!

Hausaufgabe 1 [24 PUNKTE]

Für eine Signatur S mit Prädikatssymbolen $R_{/1}$ und Prädikatssymbol $S_{/2}$ betrachten wir die Formeln

$$A := \forall x\, \exists y\, \big(s(x,y) \vee r(y)\big) \qquad \text{und} \qquad B := \exists x\, \forall y\, \big(r(x) \to s(x,y)\big)$$

(a) [8 PUNKTE] Finden Sie eine bereinigte Darstellung C für $A \wedge B$ und wandeln Sie diese in PNF um.

(b) [8 PUNKTE] Finden Sie eine Formel D in bPNF, die zu $A \wedge B$ erfüllungsäquivalent ist und weniger Quantoren aufweist als die Formel in Teil (a).

(c) [8 PUNKTE] Wandeln Sie die Formeln aus (a) und (b) in Skolem-Normalform um.

Hausaufgabe 2 [20 PUNKTE]

Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik besagt:

> Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ ist genau dann erfüllbar, wenn dies für jede endliche Teilmenge von Σ gilt.

Dabei bedeutet Erfüllbarkeit die Existenz einer $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ und einer Belegung $\sigma \in D^V$, so dass $\mathcal{M}[\![B]\!](\sigma) = 1$ für jede Formel $B \in \Sigma$.

Gegeben sei $A \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Model $\mathcal{M}_n = \langle D_n, I_n\rangle$ mit mindestens n Elementen besitzt, also $|D_n| \geq n$.

1. [5 PUNKTE] Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel $B_n \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ an, so dass für jede $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ gilt: $\mathcal{M}$ erfüllt B_n genau dann, wenn $|D| \geq n$.
2. [5 PUNKTE] Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatztes, dass die Formelmenge $\Sigma = \{\, A \wedge B_n \,:\, n \in \mathbb{N}\,\}$ erfüllbar ist.
3. [5 PUNKTE] Zeigen Sie, dass A ein Model mit unendlichem Datenbereich besitzt. [Hinweis: betrachten Sie ein Model für Σ.]
4. [5 PUNKTE] Schließen Sie, dass es keine Formel E gibt, deren Modelle genau die $\mathcal{S}$-Strukturen mit endlichem Datenbereich sind.

Hausaufgabe 3 [16 PUNKTE]

[Elimination des „="-Symbols aus Formeln]

Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man zu jeder Formel $A \in \boldsymbol{FO}(S)$ eine erfüllungsäquivalente Formel $A^{\neq}$ *ohne Gleichheitszeichen* konstuiert, so dass zusätzlich gilt:

> Hat $A^{\neq}$ ein abzählbares Modell $\mathcal{M}^{\neq}$, dann hat A ein abzählbares Modell $\mathcal{M}$.

Hier genügt es, die Konstruktion der Formel $A^{\neq}$ zu skizzieren, und für die Beschreibung von $\mathcal{M}$ reicht es, zu erläutern, wie der Datenbereich D aus $D^{\neq}$ entsteht.

Hausaufgabe 4 [20 PUNKTE]

Beweisen Sie das Substitutionslemma:

$$\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![A]\!](\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})$$

Hausaufgabe 5 [12 PUNKTE]

1. [6 PUNKTE] Zeigen Sie, dass die Skolemisierung einer bPNF-Formel unabhängig von der Reihenfolge ist, in der die Existenz-Quantoren eliminiert werden.
2. [6 PUNKTE] Beweisen Sie: Jede bPNF-Formel $B \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ ist zu ihrer Skolemisierung in $\boldsymbol{FO}(\mathcal{S} + \boldsymbol{Sko})$ erfüllbarkeitsäquivalent.

Abgabe bis Dienstag, 2019-07-09, 13:15, im Kasten neben IZ 343