SS 2020 | 12. Juni 2020

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Blatt 2

Prof. Dr. Roland Meyer,
Sören van der Wall
Abgabe bis Do, 11. Juni 2020 um 23:59

Aufgabe 2.1 (Semantik von Formeln — **2 + 2 + 3 + 3 = 10 Pkt**)

a) Sei φ eine Bewertung mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi(q) = \varphi(r) = 0$. Berechnen Sie

$$\varphi(\neg(p \wedge q) \rightarrow r)$$

schrittweise anhand der Definition der Auswertung von Bewertungen.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))$ eine Tautologie ist.

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $q \rightarrow p \models p \rightarrow q$.

d) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\neg p \vee \neg q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(p \wedge q)$.

Aufgabe 2.2 (Beweisen in $\mathcal{F}_0$ — **3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 Pkt**)

In dieser Aufgabe dürfen Sie

$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow (B \rightarrow A)$	Ax1
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Ax2
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg B \rightarrow \|A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Ax3
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \rightarrow A$	Bsp 2.11
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow A$	Lem 0
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$	Lem 1
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$	Lem 2
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow \neg\neg A$	Lem 3
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Lem 4
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$	Lem 5
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$	Lem 6
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A)$	Lem 7

verwenden, sowie das Deduktionstheorem und die Inkonsistenzregel. Nicht jedoch den Vollständigkeitssatz.

Beweisen Sie:

a) $\vdash_{\mathcal{F}_0} q \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$

b) $\neg(q \rightarrow p) \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$.

c) $\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg(p \rightarrow p) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$

d) $q, r \rightarrow \neg q \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg r$

e) $p \rightarrow (\neg q \rightarrow r), (\neg q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg q), \neg r \vdash_{\mathcal{F}_0} \neg p$

Aufgabe 2.3 (Vollständige Junktorenmengen — **2 + 5 + 2 + 6 = 15 Pkt**)
Für eine Menge M von Junktoren sei $F(M)$ die Menge der Formeln, in denen nur Junktoren aus M vorkommen. Zum Beispiel ist die Menge aller aussagenlogischer Formeln $F(\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$. Eine Menge M von Junktoren heißt vollständig, wenn es für jede Formel A $\in$ F eine logisch äquivalente Formel B $\in$ F(M) gibt.

a) Wir wollen zeigen, dass die Menge $F(\vee, \wedge)$ nur erfüllbare Formeln enthält. Erklären Sie, warum es schwierig ist, direkt per Induktion zu zeigen, dass jede Formel in $F(\vee, \wedge)$ erfüllbar ist.

b) Stattdessen müssen wir eine stärkere Aussage per Induktion beweisen: Finden Sie eine Belegung der Variablen ψ, deren Bewertung alle Formeln in $F(\vee, \wedge)$ erfüllt und beweisen Sie diese Eigenschaft durch Induktion.

c) Zeigen Sie: $\{\vee, \wedge\}$ ist keine vollständige Operatorenmenge.

d) Sei $\overline{\wedge}$("NAND") ein Junktor, sodass für alle Formeln A, B und alle Bewertungen φ gilt:

$$\varphi(A \overline{\wedge} B) = 1 - \min\{\varphi(A), \varphi(B)\}.$$

Zeigen Sie mittels struktureller Induktion, dass die Menge $\{\overline{\wedge}\}$ eine vollständige Junktorenmenge ist.

Aufgabe 2.4 (Anwendung des Kompaktheitssatzes — **10 Pkt**)
Ein (einfacher, unendlicher) Graph $G = (V, E)$ ist vierfärbbar, falls es eine Färbung $c : V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ der Knoten gibt, sodass für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $c(u) \neq c(v)$.

Ein endlicher Teilgraph G' von G ist $G' = (V', E')$, sodass $V' \subseteq V$ mit $|V'| < \infty$ und $E' \subseteq V' \times V' \cap E$.

Zeigen Sie: Ein Graph ist vierfärbbar genau dann, wenn jeder endliche Teilgraph vierfärbbar ist.

Abgabe bis Do, 11. Juni 2020 um 23:59 per Mail an Ihren Gruppenleiter.