SS 2021 20. Juli 2021

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Blatt 7

Prof. Dr. Roland Meyer,
Sören van der Wall Abgabe bis - um -

Aufgabe 7.1 (Substitutionen)
Berechnen Sie die resultierenden Formeln für folgende Substitutionen. Die Signatur enthalte die Prädiksymbole $<_{/2}$ und Funktionssymbole $f_{/1}, g_{/2}, c_{/0}$

a) $\big[x = f(y) \vee x < f(y)\big]\{y/g(x,x)\}$

b) $\big[x = y \vee \exists z.f(x) = z \vee f(y) = z\big]\{x/g(x,y)\}$

c) $\big[x = y \vee \exists x.f(x) = y\big]\{x/f(x)\}$

d) $\big[\forall x.x < y \wedge \forall y.y < x\big]\{x/c, y/c\}$

Aufgabe 7.2 (Substitutionslemma)
Beweisen Sie das Substitutionslemma aus der Vorlesung: Sei $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine Formel, $\mathcal{M}$ eine S-Struktur, σ eine Belegung, $x \in V$ eine Variable und $t \in Term(S)$ ein Term. Dann gilt:

$$\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = M[\![A]\!]\big(\sigma\{x/M[\![t]\!]\,(\sigma)\}\big)\ .$$

Aufgabe 7.3 (Funktionssymbole und Herbrand-Expansion)
Sei S eine Signatur mit endlich vielen Funktions- und Prädikatssymbolen, in der keine Funktionssymbole vorkommen, deren Stelligkeit größer als 0 ist. Sei $A \in \mathsf{FO}^{\neq}S$ eine abgeschlossene Formel in Skolemform, in der keine Gleichheit vorkommt.

a) Zeigen Sie, dass die Herbrand-Expansion von A endlich ist.

b) Geben Sie ein Verfahren an, das entscheidet, ob A erfüllbar ist.

c) Viele Algorithmen, die Unerfüllbarkeit von prädikatenlogischen Formeln überprüfen, erwarten, dass die Formel sogar in *Klauselform* (auch Klauselnormalform genannt) ist.

   Eine Formel $A \in \mathsf{FO}^{\neq}S$ ist in Klauselform, wenn sie abgeschlossen und in Skolemform ist, d.h. $A \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n\colon B$, wobei in B keine Quantoren vorkommen. Zusätzlich ist B in der prädikatenlogischen Entsprechung der *konjuktiven Normalform (KNF)*: B ist eine Konjunktion von Klauseln $B \equiv K_1 \wedge \ldots \wedge K_n$, wobei eine *Klausel* K eine Disjunktion von Literalen ist, $K \equiv L_1 \vee \ldots \vee L_m$. Ein *Literal* L

ist ein Prädikatssymbol angewandt auf Terme, $L \equiv p(t_1, \ldots, t_k)$, oder ein negiertes Prädikatssymbol angewandt auf Terme, $L \equiv \neg p(t_1, \ldots, t_k)$.

Berechnen Sie zur folgenden Formel Schritt für Schritt eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Klauselform.

$$\forall x \exists y\colon\ (p(x) \wedge r(y)) \rightarrow \neg\left((p(x) \wedge q(z)) \vee (q(y) \wedge r(z))\right)$$

Aufgabe 7.4 (Nichtstandardmodelle)
In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man die Existenz eines Nichstandardmodels für die Arithmetik der natürlichen Zahlen beweisen kann. In dieser Aufgabe konstruieren wir analog ein Nichtstandardmodell für die Arithmetik der rationalen Zahlen.
Es sei $S = (Fun, Pred)$ die Signatur mit Funktionssymbolen $F = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, *_{/2}\}$ und Prädikatssymbolen $P = \{<_{/2}\}$. Außerdem sei $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, I)$ die S-Struktur, in der der Datenbereich aus den rationalen Zahlen besteht und die Symbole 0, 1, +, $*$ und $<$ wie üblich interpretiert sind, d.h. $0^{\mathcal{Q}} = 0 \in \mathbb{Q}, 1^{\mathcal{Q}} = 1 \in \mathbb{Q}, d +^{\mathcal{Q}} e = d + e \in \mathbb{Q}$, $d *^{\mathcal{Q}} e = d * e \in \mathbb{Q}$ und $d <^{\mathcal{Q}} e = 1$ gdw. $d < e$ in $\mathbb{Q}$.
Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$ die Menge aller abgeschlossenen Formeln über S, für die $\mathcal{Q}$ ein Modell ist:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}} = \{A \in \mathsf{FO}_{\text{abg}}(S) \mid \mathcal{Q} \models A\} \ .$$

a) Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Sigma = \mathcal{T}_{\mathcal{Q}} \ \dot\cup\ \{(0 < x) \wedge \left((\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ Mal}}) * x < 1 \right) \mid n \in \mathbb{N}\} \ ,$$

wobei x eine freie Variable ist. Zeigen Sie, dass Σ erfüllbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

b) Zwei Strukturen $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ über der selben Signatur heißen *elementar äquivalent*, wenn sie die gleichen abgeschlossenen Formeln wahr machen:
Für alle $A \in \mathsf{FO}_{\text{abg}}(S)$ gilt: $\mathcal{M} \models A$ gdw. $\mathcal{M}' \models A$.

Zeigen Sie, dass jede Struktur M, die Σ aus Aufgabenteil a) erfüllt, elementar äquivalent zu $\mathcal{Q}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine Belegung $\sigma : V \rightarrow \mathbb{Q}$ gibt, so dass $\mathcal{Q}, \sigma \models \Sigma$ gilt.

Hinweis: Aufgabenteil a) zeigt, dass Σ ein Modell $\mathcal{M}$ hat, und mit Aufgabenteil b) sind $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{M}$ elementar äquivalent. Aufgabenteil c) zeigt im Wesentlichen, dass $\mathcal{Q}$ nicht *isomorph* zu $\mathcal{M}$ ist. Daher nennen wir $\mathcal{M}$ *Nichtstandardmodel*.

Abgabe bis - um - per StudIP in Ihren Gruppenordner.