Technische Universität Braunschweig

TCS

Dr. Jürgen Koslowski

Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 5, 2022-07-04

Präsenzaufgabe 1

Beweisen Sie das Substitutionslemma auf Folie 207:

$$\mathcal{M}[\![@\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![@]\!]\,(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})$$

Lösungsvorschlag:

Der Beweis ist zum Selbststudium gedacht, da recht aufwändig; die schwerfällige Notation trägt ihren Teil dazu bei.

Zwecks Vereinfachung schreiben wir $\boldsymbol{u}$ anstelle von Tupeln $\langle u_0, \ldots, u_{n-1}\rangle \in \boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, \mathcal{V})^n$.

Zunächst führen wir eine Induktion über Terme durch:

- $@$ ist eine von x verschiedene Variable u :

$$\mathcal{M}[\![u\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![u]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![u]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)$$

- $@ = x$:

$$\mathcal{M}[\![x\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![x]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)$$

- $@ = f(\boldsymbol{u})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![f(\boldsymbol{U})\{x/t\}]\!](\sigma) &= f^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![\boldsymbol{u}\{x/t\}]\!](\sigma)\big)\\ &= f^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![\boldsymbol{u}]\!](\sigma\{\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})\big) = \mathcal{M}[\![u]\!](\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\})\end{aligned}$$

Nun erfolgt die Induktion über den Aufbau prädikatenlogischer Formeln:

- $@$ ist eine Gleichung $u_0 \doteq u_1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![(u_0 \doteq u_1)\{x/t\}]\!](\sigma) = 1 \quad &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![u_0\{x/t\}]\!](\sigma) = \mathcal{M}[\![u_1\{x/t\}]\!](\sigma)\\ &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![u_0]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big) = \mathcal{M}[\![u_1]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)\\ &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![u_0 \doteq u_1]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) = 1\end{aligned}$$

- $@$ ist eine Prädikatsauswertung $P(\boldsymbol{u})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![P(\boldsymbol{u})\{x/t\}]\!](\sigma) = 1 \quad &\text{gdw} \quad \big\langle\mathcal{M}[\![\boldsymbol{u}\{x/t\}]\!](\sigma)\big\rangle \in P^{\mathcal{M}}\\ &\text{gdw} \quad \big\langle\mathcal{M}[\![\boldsymbol{u}]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)\big\rangle \in P^{\mathcal{M}}\\ &\text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![P(\boldsymbol{u})]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) = 1\end{aligned}$$

- @ ist eine Negation $\neg B$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![\neg B\{x/t\}]\!](\sigma) &= 1 - \mathcal{M}[\![B\{x/t\}]\!](\sigma) \\ &= 1 - \mathcal{M}[\![B]\!]\big\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big\} = \mathcal{M}[\![\neg B]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\end{aligned}$$

- @ ist eine Konjunktion $B \wedge C$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![(B \wedge C)\{x/t\}]\!](\sigma) &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B\{x/t\}]\!](\sigma), \mathcal{M}[\![C\{x/t\}]\!](\sigma)\big\} \\ &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}, \mathcal{M}[\![C]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big\} \\ &= \mathcal{M}[\![B \wedge C]\!]\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\end{aligned}$$

- @ ist eine Disjunktion $B \vee C$: analog wie bei der Konjunktion mit $\sup$ anstelle von $\inf$.
- @ ist eine Implikation $B \to C$: umschreiben zu $\neg B \vee C$.
- @ ist eine $\forall$ -quantifizierte Formel $\forall y\, B$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\![(\forall y.B)\{x/t\}]\!](\sigma) &= \mathcal{M}[\![\forall z\, B\{y/z\}\{x/t\}]\!](\sigma) \quad \text{mit} \quad z \notin V(B) \cup \{x\} \cup V(t) \\ &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B\{y/z\}\{x/t\}]\!](\sigma\{z/d\}) \,:\, d \in D\big\} \\ &= \inf\big\{\mathcal{M}[\![B\{y/z\}]\!]\big(\sigma\{z/d\}\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma\{z/d\})\}\big) \,:\, d \in D\big\} \\ &= \mathcal{M}[\![\forall z\, B\{y/z\}]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big) \quad \text{weil} \quad z \notin V(B) \cup \{x\} \cup V(t) \\ &= \mathcal{M}[\![\forall y.B]\!]\big(\sigma\{x/\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\}\big)\end{aligned}$$

- @ ist eine $\forall$ -quantifizierte Formel $\exists y\, B$: analog wie bei der universellen Quantifizierung mit $\sup$ anstelle von $\inf$.

Präsenzaufgabe 2

Begründen Sie ihre Antworten ausführlich:

(a) Die Signatur S möge mindestens ein einstelliges Prädikatensymbol P enthalten. Wir betrachten einen Term t , in dem die Variable x nicht vorkommt. Ist die Formel

$$P(t) \leftrightarrow \forall x : (x \doteq t \to P(x))$$

allgemeingültig?

(b) Bleibt die Antwort dieselbe, wenn x im Term t vorkommt?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Behauptung ist korrekt: Betrachte eine S -Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ mit und eine Belegung σ . Dann gilt

$$\mathcal{M}[\![P(t)]\!](\sigma) = 1 \quad \text{gdw} \quad \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma) \in P^{\mathcal{M}} \subseteq D \quad \text{gdw} \quad P^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)) = 1$$

insbesondere also $\mathcal{M}[\![P(t)]\!](\sigma) = P^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big)$, sowie

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}[\![\forall x\,(x \doteq t \to P(x))]\!](\sigma)\\
&= \inf\{\, \mathcal{M}[\![x \doteq t \to P(x)]\!](\sigma\{x/d\}) \,:\, d \in D \,\}\\
&= \inf\{\, \mathcal{M}[\![\neg(x \doteq t) \vee P(x)]\!](\sigma\{x/d\}) \,:\, d \in D \,\}\\
&= \inf\{\, \sup\{\mathcal{M}[\![\neg(x \doteq t)]\!](\sigma\{x/d\}), \mathcal{M}[\![P(x)]\!](\sigma\{x/d\})\} \,:\, d \in D \,\}\\
&= \inf\{\, \sup\{1 - (d = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma\{x/d\})), P^{\mathcal{M}}(d)\} \,:\, d \in D \,\}\\
&= \inf\{\, \sup\{1 - (d = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)), P^{\mathcal{M}}(d)\} \,:\, d \in D \,\}\\
&= \inf\{\, \sup\{d \neq \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma), P^{\mathcal{M}}(d)\} \,:\, d \in D \,\}\\
&= \inf\{\, P^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big) \,:\, d \in D \,\}\\
&= P^{\mathcal{M}}\big(\mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)\big)\\
&= \mathcal{M}[\![P(t)]\!](\sigma)
\end{aligned}
$$

wobei in der sechsten Zeile verwendet wurde, dass x nicht in t vorkommt, die Substitution $\{x/d\}$ also wirkungslos bleibt. In der drittletzten Zeile kam zum Tragen, dass das binäre Supremum den Wert 0 höchstens für $d = \mathcal{M}[\![t]\!](\sigma)$ annehmen kann.

(b) Wenn x in t vorkommt, enthält $P(t)$ die freie Variable x, die rechte Seite der Äquivalenz aber nicht. Wir wollen versuchen, in einer Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ die Voraussetzung der Implikation $x \doteq t \to P(x)$ immer falsch und somit die rechte Seite der Äquivalenz immer wahr zu machen, während der Wert von $\mathcal{M}[\![P(t)]\!]$ von σ abhängen kann, also nicht immer wahr zu sein braucht. Insbesondere ist $P^{\mathcal{M}}$ dann eine echte Teilmenge von D.

Beispiel: für den Träger $\mathbb{N}$, das Prädikat $P(x)$ "x ist gerade" und den Term $t := x + 1$ passiert genau das: $P(t)$ ist nur für ungerade Zahlen $\sigma(x)$ erfüllt, aber die Implikation auf der rechten Seite ist aufgrund der immer falschen Voraussetzung für jedes $a \in \mathbb{N}$ erfüllt, also ist die rechte Seite immer wahr.

Die linke Seite wird aber für solche Belegungen σ falsch, die x eine gerade Zahl zuordnen.

Präsenzaufgabe 3

Hintergrund zur Herbrand-Theorie: Wir betrachten eine Signatur $\mathcal{S} = \boldsymbol{Fun} + \boldsymbol{Pred}$ und eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$.

Insbesondere ist D zusammen mit der Interpretation der Operatoren in $\boldsymbol{Fun}$ eine $\boldsymbol{Fun}$-Algebra. Wir wollen untersuchen, wie sich $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismen nach bzw. von $\langle D, I_{\boldsymbol{Fun}} \rangle$ mit $I_{\boldsymbol{Pred}}$ vertragen.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Jeder $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus $\langle C, H_{\boldsymbol{Fun}} \rangle \xrightarrow{a} \langle D, I_{\boldsymbol{Fun}} \rangle$ erzeugt auf kanonische Weise eine Interpretation $H_{\boldsymbol{Pred}}$ der Prädikate und damit einer $\mathcal{S}$-Struktur auf C.

Speziell liefert jede Abbildung $Z \xrightarrow{\zeta} D$ auf kanonische Weise eine $\mathcal{S}$-Struktur auf $\boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, Z)$.

(b) Jeder $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus $\langle D, I_{\boldsymbol{Fun}} \rangle \xrightarrow{b} \langle E, J_{\boldsymbol{Fun}} \rangle$ erzeugt auf kanonische Weise eine $\mathcal{S}$-Struktur auf dem b-Bild $b[D] \subseteq E$ und damit auf E.

Lösungsvorschlag:

(a) Um ein Prädikat $R \in \boldsymbol{Pred}$ auf C zu interpretieren verwenden wir einfach das a-Urbild $R' \subseteq C^{\mathcal{S}(R)}$ der Relationen $R^{\mathcal{M}} \subseteq D^{\mathcal{S}(R)}$. Dann gilt für $\boldsymbol{c} \in C^{\mathcal{S}(R)}$ automatisch

$$\boldsymbol{c} \in R' \quad \text{gdw} \quad a^{\mathcal{S}(R)}(\boldsymbol{c}) \in R^{\mathcal{M}}$$

d.h,. a bewahrt und reflektiert R.

Speziell induziert $Z \xrightarrow{\zeta} D$ einen eindeutig bestimmten $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus $\bar{\zeta}$ von $\boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, Z)$ auf D, der ζ fortsetzt. Nun können wir wie oben verfahren.

Das funktioniert insbesondere für die Inklusion $\emptyset \xrightarrow{i} D$, aber damit $\boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, \emptyset)$ nicht leer ist, muß $\boldsymbol{Fun}$ eine Konstante enthalten.

(b) Wir zeigen zunächst, dass das Bild $b[D] \subseteq E$ eine Unteralgebra, d.h., unter den $\boldsymbol{Fun}$-Operationen auf E abgeschlossen ist.

Für $f \in \boldsymbol{Fun}$ und $\boldsymbol{e} \in (b[D])^{\mathcal{S}(f)}$ existiert ein b-Urbild $\boldsymbol{d} \in D^{\mathcal{S}(f)}$. Aufgrund der Homomorphie-Eigenschaft gilt nun

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\boldsymbol{d}"'] \arrow[drr, "\boldsymbol{e}"] & & \\ & D^{\mathcal{S}(f)} \arrow[r, "b^{\mathcal{S}(f)}"'] \arrow[d, "I(f)"'] & b[D]^{\mathcal{S}(f)} \arrow[d, "K(f)"] \\ & D \arrow[r, "b"'] & b[D] \end{tikzcd}$$

Für jedes $R \in \boldsymbol{Pred}$ ist das b-Bild R'' von $R^{\mathcal{M}} \in D^{\mathcal{S}(R)}$ eine Teilmenge von $(b[D])^{\mathcal{S}(R)}$ (und trivialerweise von $E^{\mathcal{S}(R)}$).

$$\boldsymbol{e} \in R'' \quad \text{gdw} \quad (b^{\mathcal{S}(R)})^{-1}(\boldsymbol{e}) \cap R^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$$

d.h., nicht jedes Urbild von $\boldsymbol{e} \in R''$ muß zu $R^{\mathcal{M}}$ gehören. (Der $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismus b bewahrt zwar R, reflektiert es aber nicht notwendig.)

Damit wird $b[D]$ zu einer $\mathcal{S}$-Struktur, und trivialerweise auch ganz E. Dieses Ergebnis ist besonders für surjektive $\boldsymbol{Fun}$-Homomorphismen b von Interesse.

Herbrand verwendet Teil (a) mit $Z = \emptyset$ im Fall, dass $\boldsymbol{Fun}$ mindestens eine Konstante enthält. Genau in diesem Fall ist $\boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, \emptyset)$ nicht leer.

Hausaufgabe 4 [12 PUNKTE]

Beweisen Sie die Rechenregeln (4) und (5) auf Folie 203 (inzwischen 211).

Lösungsvorschlag:

$\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ sei jeweils eine $\mathcal{S}$-Struktur und eine Belegung der Variablen. Der Fall $\rightarrow$ kann bei $\vee$ abgehandelt werden.

Die Strategie besteht in der Auswertung beider Seiten der behaupteten Äquivalenz und der Überprüfung, ob sie übereinstimmen. Dazu muß man sich davon überzeugen, dass die Distributivgesetze von Folie 66 auch in der Menge $\mathbb{B}$ der Wahrheitswerte gelten, und zwar für beliebige, nicht notwendig endlich indizierte Familien $\langle b_i : i \in I \rangle \in \mathbb{B}^I$, d.h.,

$$a \wedge \sup_{i \in I} b_i = \sup_{i \in I} (a \wedge b_i) \qquad \text{sowie} \qquad a \vee \inf_{i \in I} b_i = \inf_{i \in I} (a \vee b_i)$$

Beides stimmt offensichtlich für $a = 0$ und für $a = 1$. Wegen der Idempotenz und der Assoziativität beider Operationen gilt zudem

$$a \vee \sup_{i \in I} b_i = \sup_{i \in I} (a \vee b_i) \qquad \text{sowie} \qquad a \wedge \inf_{i \in I} b_i = \inf_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

(4) [8 PUNKTE] Zu überprüfen bleiben vier Fälle, von denen jeweils zwei dual zueinander sind. Nach Voraussetzung gilt $\hat{\sigma}(A) = \widehat{\sigma\{x/d\}}(A)$ für jedes $d \in D$.

(a)

$$\begin{aligned}\hat\sigma(A \wedge \forall x.\, B) &= \inf\big\{\hat\sigma(A), \inf\{\, \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \;:\; d \in D \,\}\big\}\\ &= \inf\big\{ \inf\{\hat\sigma(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B)\} \;:\; d \in D \,\big\}\\ &= \inf\big\{ \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B)\} \;:\; d \in D \,\big\}\\ &= \inf\big\{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A \wedge B)\} \;:\; d \in D \,\big\}\\ &= \hat\sigma\big(\forall x.\,(A \wedge B)\big)\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\hat\sigma(A \vee \exists x.\, B) = \hat\sigma\big(\exists x.\,(A \vee B)\big)$$

(b)

$$\begin{aligned}\hat\sigma(A \wedge \exists x.\, B) &= \inf\big\{\hat\sigma(A), \sup\{\, \widehat{\sigma\{x/d\}}(B) \;:\; d \in D \,\}\big\}\\ &= \sup\big\{ \inf\{\hat\sigma(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B)\} \;:\; d \in D \,\big\}\\ &= \sup\big\{ \inf\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A), \widehat{\sigma\{x/d\}}(B)\} \;:\; d \in D \,\big\}\\ &= \sup\big\{ \widehat{\sigma\{x/d\}}(A \wedge B)\} \;:\; d \in D \,\big\}\\ &= \hat\sigma\big(\exists x.\,(A \wedge B)\big)\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\hat\sigma(A \vee \forall x.\, B) = \hat\sigma\big(\forall x.\,(A \vee B)\big)$$

(5) [4 PUNKTE] Nach Teil (a) gilt:

$$\mathcal{Q}x\, B \to A \;\models\!\!\!\!\dashv\; \neg(\mathcal{Q}x\, B) \vee A \;\models\!\!\!\!\dashv\; (\bar{\mathcal{Q}}x\, \neg B) \vee A \;\models\!\!\!\!\dashv\; \bar{\mathcal{Q}}x\,(\neg B \vee A) \;\models\!\!\!\!\dashv\; \bar{\mathcal{Q}}x\,(B \to A)$$

Hausaufgabe 5 [21 PUNKTE]

Wir betrachten die Signatur Σ der Arithmetik mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionensymbolen $+$ und $\cdot$ einem zweistelligen Prädikatensymbol $<$. Viele Aussagen über natürliche Zahlen (also die Σ- Struktur mit Trägermenge $\mathbb{N}$ und der üblichen Interpretation der Symbole in Σ) lassen sich als prädikatenlogische Formeln über Σ ausdrücken.

Beispiel: Der Aussage "‘ x ist eine gerade Zahl"’ entspricht die Formel $\exists y : (x = y + y)$ mit einer freien Variable x.

Transformieren Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln über Σ:

(a) [3 PUNKTE] "‘ x teilt $y + 1$."’

(b) [4 PUNKTE] "‘ x ist eine Primzahl."’

(c) [4 PUNKTE] "‘Es gibt unendlich viele Primzahlen"’

(d) [5 PUNKTE] "‘Jede gerade Zahl ≥ 4 läßt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen."’

(e) [5 PUNKTE] "‘Alle Zahlen mit ungeradem Quadrat sind ungerade."’

Lösungsvorschlag:

Wir machen uns das Leben leicher, indem wir Abkürzungen einführen. Man beachte, dass die dabei gebundenen Variablen in der Abkürzung nicht vorkommen. D.h., wir verwenden die Tatsache, dass gebundene Variablen immer geeignet umbenannt werden können.

(a) $T(x,y) := \exists z : x \cdot z = y + 1$

(b) $P(x) := \neg(x = 1) \wedge \forall y : \big(\exists z : y \cdot z = x \to (y = 1) \vee (y = x)\big)$

(c) $\forall z : \exists x : (z < x \wedge P(x))$

(d) $\forall x : (1 + 1 + 1 < x \wedge \exists y : y + y = x \to \exists u : \exists v : P(u) \wedge P(v)\ x = u + v)$

(e) Charakterisierung der ungeraden Zahlen: $\forall y : \neg(x = y + y)$. Das liefert:

$$\forall x : (\forall y : \neg(x \cdot x = y + y)) \to \forall z : \neg(x = z + z)$$

Hausaufgabe 6 [16 PUNKTE]

[Elimination des $\doteq$-Symbols aus Formeln]

Motivation: Folgendes Verfahren konstruiert zu jeder $\boldsymbol{FO}$-Formel A eine erfüllungsäquivalente Formel $A^{(E)}$ *ohne formales Gleichheitszeichen* $\doteq$, so dass Folgendes gilt: wenn $A^{(E)}$ ein abzählbares Modell $\mathcal{M}'$ besitzt, dann soll A auch ein abzählbares Modell $\mathcal{M}$ haben.

ObdA möge A in bereinigter Skolem-Normalform vorliegen.

Wir erweitern die endliche(!) Minimalsignatur $\mathcal{S}_A$ für A um ein neues 2-stelliges Relationssymbol $E_{/2}$ zu einer Signatur $\mathcal{S}'_A$. Dieses substituieren wir anstelle von $\doteq$ in A:

$$A_1 := A\{\doteq / E\}$$

Jedes Model $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ für A läßt sich zu einem Model für A_1 erweitern: man braucht nur als Interpretation $E^{\mathcal{M}}$ des neuen Prädikatssymbols die Gleichheit auf D zu nehmen.

Umgekehrt wissen wir aber nicht, ob jedes Model für A_1 auch ein Model für A ist oder zu einem solchen umgebaut werden kann.

Idee: Ziel ist es nun, die Formel A_1 so zu einer Formel $A^{(E)}$ zu erweitern, dass $A^{(E)}$ in einer $\mathcal{S}'_A$-Struktur $\mathcal{M}'$ nur dann erfüllbar ist, wenn E in $\mathcal{M}'$ als Kongruenzrelation bzgl. $\mathcal{S}'_A$ interpretiert wird, genannt $\equiv$, und zwar sowohl bezüglich der Funktionssymbole in $\boldsymbol{Fun}$, als auch bzgl. der Prädikatssymbole in der ursprünglichen Menge $\boldsymbol{Pred}$. D.h., zu A_1 sind endlich viele Bedingungen an E hinzuzufügen.

Wenn das gelingt, kann man den Datenbereich D' eines Models von $A^{(E)}$ nach $\equiv$ faktorisieren (d.h., die Äquivalenzklassen im Datenbereich bilden) und erhält so eine neue $\mathcal{S}'_A$-Struktur $\mathcal{M}'/E^{\mathcal{M}'}$, in der E als Gleichheit interpretiert wird, und deren Interpretationen der $\mathcal{S}_A$-Symbole sich aus denjenigen von $\mathcal{M}'$ ergeben, indem man letztere auf Repräsentanten der zu bearbeitenden Äquivalenzklassen anwendet. Aufgrund der Kongruenzeigenschaften von $e^{\mathcal{M}}$ ist dieses Vorgehen unabhängig von der Wahl dieser Repräsentanten und somit wohldefiniert.

Wenn $A^{(E)}$ überhaupt ein Model hat, dann hat $A^{(E)}$ auch ein Herbrand-Model $\mathcal{H}$ bzgl. $\mathcal{S}'_A$; dieses ist abzählbar. Die obige Konstruktion liefert dann ein abzählbares Model von $A^{(E)}$, in dem E als Gleichheit interpretiert wird, und damit ein abzählbares Model der ursprünglichen Formel A.

[16 PUNKTE] Geben Sie an, welche Bedingungen an E zu A_1 hinzuzufügen sind!

Lösungsvorschlag:

Zu A_1 fügen wir die Konjunktion folgender Bedingungen an E hinzu:

- $\forall x\, E(x,x)$ (E ist reflexiv);
- $\forall x\, \forall y\, \forall z \big(E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z)\big)$ (E ist transitiv);
- $\forall x\, \forall y\, \big(E(x,y) \to E(y,x)\big)$ (E ist symmetrisch);

- $\forall z_0, \ldots, z_{i-1} \forall x \forall y \forall z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}$
  $\big(E(x,y) \to E(f(z_0, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}), f(z_0, \ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}))\big)$
  falls $f_{/n} \in \boldsymbol{Fun}$ und $i < n$ (E ist vertäglich mit f in Argument $i < n$);

- $\forall z_0, \ldots, z_{i-1} \forall x \forall y \forall z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}$
  $\big(E(x,y) \wedge P(z_0, \ldots, z_{i-1}, x, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}) \to P(z_0, \ldots, z_{i-1}, y, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1})\big)$
  falls $p_{/n} \in \boldsymbol{Pred}$ und $i < n$ (E ist verträglich mit P in Argument $i < n$).

Beachte, dass sich ***Fun*** und ***Pred*** auf die Minimalsignatur $\mathcal{S}_A$ beziehen und daher endlich sind!

Hausaufgabe 7 [10 PUNKTE]

(a) [2 PUNKTE] Unter welchen Bedingungen ist die Herbrand-Expansion einer geschlossenen Formel A in Skolem-Normalform endlich?

(b) [3 PUNKTE] Unter welchen Bedingungen ist die Herbrand-Expansion einer geschlossenen Formel A in Skolem-Normalform isomorph zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$?

(c) [5 PUNKTE] Geben Sie für $\mathcal{S} = \{c_{/0}, f_{/1}, g_{/2}\} + \{P_{/1}, Q_{/2}\}$ die Elemente der Herbrand-Expansion für $A = \forall x.\big(P(x) \wedge \neg P(f(x))\big)$ an, die *ohne Klammern* höchstens 6 Symbole enthalten.

Lösungsvorschlag:

(a) Es gibt zwei Möglichkeiten für $E(A)$, endlich zu sein: falls der quantorenfreie Teil B von A keine Variablen enthält, oder wenn $D_{\mathcal{H}}$ endlich ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn ***Fun*** nur aus endlich vielen Konstanten besteht. Sobald neben $c_{/0} \in \boldsymbol{Fun}$ auch ein $f_{/n} \in \boldsymbol{Fun}$ mit $n > 0$ existiert, können wir z.B. den Term $f(x, c, \ldots, c)$ in beliebiger Tiefe in sich selbst substituieren und schließlich mit c für x terminieren und auf diese Weise unendlich viele verschiedene Elemente von $D_{\mathcal{H}}$ erzeugen.

(b) Immer wenn $E(A)$ nicht endlich ist, ist diese Menge abzählbar unendlich, und damit isomorph zu $\mathbb{N}$! (trick question!)

(c) Schon $P(c) \wedge \neg P(f(c))$ enthält 7 Symbole, also war die Schranke 6 etwas zu konservativ gewählt. Erhöht man sie etwa auf 11, so erhalten wir:

   7 Symbole: $P(c) \wedge \neg P(f(c))$
   9 Symbole: $P(f(c)) \wedge \neg P(f(f(c)))$
   11 Symbole: $P(f(f(c))) \wedge \neg P(f(f(f(c))))$, $P(g(c,c)) \wedge \neg P(f(g(c,c)))$