Einführung in die Logik, Übungsklausur

2022-07-20

Aufgabe 1 [12 PUNKTE]

Konstruieren Sie mittels struktureller Rekursion einen Algorithmus, der geeignete Formeln aus $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ in Negationsnormalform überführt:

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel A mit Junktoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$.
(Andere Junktoren wie $\top$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, etc. sind ggf. erst zu ersetzen.)
Ausgabe: Eine zu A äquivalente Formel in NNF, bezeichnet als $\mathsf{NNF}(A)$

Lösungsvorschlag:

Wir verwenden strukturelle Rekursion:

0. $A = \bot$ oder A atomar: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(A) := A$$

1. $A = B_0 \wedge B_1$: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(B_0 \wedge B_1) := \mathsf{NNF}(B_0) \wedge \mathsf{NNF}(B_1)$$

2. $A = B_0 \vee B_1$: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(B_0 \vee B_1) := \mathsf{NNF}(B_0) \vee \mathsf{NNF}(B_1)$$

3. $A = \neg B$: Hier müssen wir eine zweite Rekursion starten, diesmal in B.

3.0 $B = \bot$ oder B atomar: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(\neg B) := \neg B$$

3.1 $B = C_0 \wedge C_1$: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(\neg(C_0 \wedge C_1)) := \mathsf{NNF}(\neg C_0) \vee \mathsf{NNF}(\neg C_1)$$

3.2 $B = C_0 \vee C_1$: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(\neg(C_0 \vee C_1)) := \mathsf{NNF}(\neg C_0) \wedge \mathsf{NNF}(\neg C_1)$$

3.3 $B = \neg C$: wir setzen

$$\mathsf{NNF}(\neg\neg C) := \mathsf{NNF}(C)$$

Aufgabe 2 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie imittels natürlicher Deduktion $\mathcal{K}_{\text{nat}}$:

1. [6 PUNKTE] $B \to A \Vdash A \vee \neg B$
2. [6 PUNKTE] $\Vdash \neg(A \to B) \to ((B \to A) \to A)$

Lösungsvorschlag:

1.

0.	$B \to A$	Prämisse
1.	$\quad \neg(A \vee \neg B)$	Ann.
2.	$\quad\quad B$	Ann.
3.	$\quad\quad A$	$(\to e)$, 2,0
4.	$\quad\quad A \vee \neg B$	$(\vee\, i)$, 2
5.	$\quad\quad \bot$	$(\neg\, e)$, 1,4
6.	$\quad \neg B$	$(\to i)$, 2–5
7.	$\quad A \vee \neg B$	$(\vee\, i)$, 6
8.	$\quad \bot$	$(\neg\, e)$, 1,7
9.	$\neg\neg(A \vee \neg B)$	$(\to i)$, 1–8
10.	$A \vee \neg B$	$(\neg\neg\, e)$, 9

2.

0.	$\neg(A \to B)$	Prämisse
1.	$\quad B \to A$	Ann.
2.	$\quad\quad \neg A$	Ann.
3.	$\quad\quad\quad A$	Ann.
4.	$\quad\quad\quad \bot$	$(\neg\, e)$, 2,3
5.	$\quad\quad\quad B$	$(\bot\, e)$, 4
6.	$\quad\quad A \to B$	$(\to i)$, 3–5
7.	$\quad\quad \bot$	$(\neg\, e)$, 0,6
8.	$\quad \neg\neg A$	$(\neg\, i)$, 2,7
9.	$\quad A$	$(\neg\neg\, e)$, 8
10.	$(B \to A) \to A$	$(\to i)$, 1–9

Aufgabe 3 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie im Hilbert-Kalkül $\mathcal{K}_0$:

1. [4 PUNKTE] $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$
2. [8 PUNKTE] $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ (Peirce's Law)

Lösungsvorschlag:

1.

0.	$A \to B$	Ann.
1.	$B \to C$	Ann.
2.	A	Ann
3.	B	MP, 2,0
4.	C	MP, 3,1
5.	$A \to C$	DT, 2–4
6.	$(B \to C) \to A \to C$	DT, 1–5
7.	$(A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$	DT, 1–5

2.

0.	$\neg A$	Ann.
1.	$(A \to B) \to A$	Ann.
2.	$\neg A \to A \to B$	Th3
3.	$A \to B$	MP, 0,2
4.	A	MP, 3,1
5.	$((A \to B) \to A) \to A$	DT, 1–4
6.	$(((A \to B) \to A) \to A) \to \neg A \to \neg((A \to B) \to A)$	Ax3
7.	$\neg A \to \neg((A \to B) \to A)$	MP, 5,6
8.	$\neg((A \to B) \to A)$	MP, 0,7
9.	$\neg A \to \neg((A \to B) \to A)$	DT, 0–8
10.	$(\neg A \to \neg((A \to B) \to A)) \to ((A \to B) \to A) \to A$	Ax3
11.	$((A \to B) \to A) \to A$	MP, 10,11

Oder alternativ mit der Inkonsistenzregel:

0.	$(A \to B) \to A$	Ann.
1.	$((A \to B) \to A) \to \neg A \to \neg(A \to B)$	Th5
2.	$\neg A \to \neg(A \to B)$	MP 0,1
3.	$\neg A \to A \to B$	Th3
4.	$\neg A$	Ann.
5.	$\neg(A \to B)$	MP, 4,2
6.	$A \to B$	MP, 4,3
7.	$\perp$	5,6
8.	$\neg\neg A$	IK, 4–7
9.	A	Th2
10.	$((A \to B) \to A) \to A$	DT, 0–9

Aufgabe 4 [12 PUNKTE]

Entscheiden Sie die Erfüllbarkeit von

$$A \equiv \neg p \wedge (p \vee q \vee \neg t) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (\neg q \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r \wedge (\neg q \vee q \vee s)$$

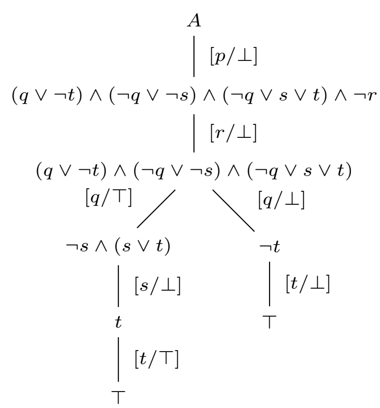
(a) [6 PUNKTE] mit dem Davis-Putnam-Verfahren,

(b) [6 PUNKTE] mit der Resolutionsmethode.

Lösungsvorschlag:

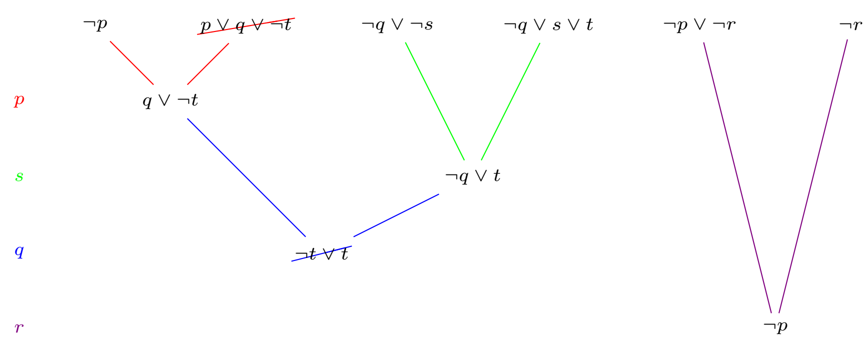
Da die Formel in KNF vorliegt, und die letzte Klausel zu $\top$ äquivalent ist, können wir diese entfernen. Weiterhin wird die Klausel $\neg p \vee r$ von $\neg p$ subsummiert, darf also auch entfernt werden.

(a) Die Pure Literal Regel greift nicht. Bis auf eine Anwendung der Splitting-Regel wird mehrfach die Unit-Regel angewendet:



A ist erfüllbar.

(b) Wir betrachten die Variablen in der Reihenfolge p, s, q, r:



A ist erfüllbar.

Aufgabe 5 [12 PUNKTE]

Bei der Einführung des Davis-Putnam-Verfahrens wird auf Folie 161 behauptet, dass für eine NNF-Formel A, die für $p \in \mathcal{A}$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt

- $A = p \wedge B$;
- p tritt nur positiv in A auf.

erfüllungsäquivalent zu $A[p/\top]$ ist, im strengen Sinne von Folie 152.

Geben Sie einen Beweis dafür an.

Lösungsvorschlag:

OBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass A bereits in KNF vorliegt: bei der Transformation einer NNF-Formel in KNF mit Hilfe eines der Distributivgesetze werden keine Negationen hinzugefügt oder entfernt.

Beachte ferner, dass sich in beiden Fällen für die Mengen $@(A)$ und $@(A[p/\top])$ der in A bzw. $A[p/\top]$ vorkommenden Atome gilt

$$@(A) = \{p\} + @(A[p/\top])$$

Nun möge $\hat{\varphi}(A[p/\top]) = 1$ gelten. Wir modifizieren φ ggf. wie folgt:

$$\varphi'(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q = p \\ \varphi(q) & \text{falls } q \neq p \end{cases}$$

Damit sind alle Klauseln von A, die p enthalten, unter φ' wahr, während in Klauseln, die $\neg p$ enthalten, ein anderes Literal auftreten muß, das unter φ und damit unter φ' wahr wird. Folglich gilt $\hat{\varphi}'(A[p/\top]) = \hat{\varphi}'(A) = 1$.

Damit ist $A[p/\top] \sqsubseteq_e A$ gezeigt und wegen $\sqsubseteq_e \;\subseteq\; \boxminus_e$ auch die Erfüllbarkeitsäquivalenz.

Aufgabe 6 [12 PUNKTE]

Berechnen Sie eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform zu

$$\big(\forall x\, \exists y.\, P(x, f(y))\big) \wedge \Big(\neg\exists y\, \forall x\, \exists z.\, \big(Q(g(z), f(x)) \vee P(y, z)\big)\Big)$$

Lösungsvorschlag:

Zunächst ist die Formel zu bereinigen. Dazu benennen wir die Variablen x und y im ersten Teil in u bzw. v um:

$$\big(\forall u\, \exists v.\, P(u, f(v))\big) \wedge \Big(\neg\exists y\, \forall x\, \exists z.\, \big(Q(g(z), f(x)) \vee P(y, z)\big)\Big)$$

Anwendung der verallgemeinerten De Morgan'schen Regeln liefert

$$\big(\forall u\, \exists v.\, P(u, f(v))\big) \wedge \Big(\forall y\, \exists x\, \forall z.\, \big(\neg Q(g(z), f(x)) \wedge \neg P(y, z)\big)\Big)$$

woaraus wir gemäß Rechenregel (2) eine PNF gewinnen:

$$\forall u\, \exists v\, \forall y\, \exists x\, \forall z.\, \big(P(u, f(v)) \wedge \neg Q(g(z), f(x)) \wedge \neg P(y, z)\big)$$

Zwecks Skolemisierung führen wir für v die frische Funktion $g_{/1}$ und für x die frische Funktion $h_{/2}$ ein:

$$\forall u\, \forall y\, \forall z.\, \big(P(u, f(g(u))) \wedge \neg Q(g(z), f(h(u, y))) \wedge \neg P(y, z)\big)$$

Aufgabe 7 [12 PUNKTE]

(a) [6 PUNKTE] Zeigen Sie unter Verweis auf Ergebnisse der VL: falls $x \notin \boldsymbol{FV}(B)$, dann gilt

$$\models A \to B \quad \text{gdw.} \quad \models (\exists x.\, A) \to B$$

(b) [6 PUNKTE] Geben Sie ein Gegenbeispiel an im Fall, dass $x \in \boldsymbol{FV}(B)$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Aufgrund von Generalisierung, Deduktion und Kontraposition haben wir

$$\begin{aligned} \models A \to B \quad & \text{gdw.} \quad \{A\} \models B \\ & \text{gdw.} \quad \{\neg B\} \models \neg A \\ & \text{gdw.} \quad \{\neg B\} \models \forall x.\, \neg A \\ & \text{gdw.} \quad \{\neg B\} \models \neg \exists x.\, A \\ & \text{gdw.} \quad \{\exists x.\, A\} \models B \\ & \text{gdw.} \quad \models \exists x.\, A \to B \end{aligned}$$

(b) Setze $\mathcal{S} = \{R_{/1}\}$, $D = \{0, 1\}$, $R^{\mathcal{M}} = \{1\}$ und wähle für $\mathcal{V} \xrightarrow{\sigma} \{0, 1\}$ die konstante 0-wertige Abblildung. Schließlich sei $A = B = R(x)$. Trivialerweise gilt $\hat{\sigma}(A \to A) = 1$. Andererseits haben wir $\hat{\sigma}(A) = 0$ und

$$\hat{\sigma}(\exists x.\, A) = \sup\{\widehat{\sigma\{x/d\}}(A) \,:\, d \in \{0, 1\}\} = 1$$

und folglich $\hat{\sigma}(\exists x.\, A \to A) = 0$.

Aufgabe 8 [12 PUNKTE]

Unter einer *Modifikation* $\{x/d\}$ versteht man eine Abbildung $D^{\mathcal{V}} \xrightarrow{\{x/d\}} D^{\mathcal{V}}$, die Belegungen $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ an der Stelle $x \in \mathcal{V}$ von $\sigma(x)$ zu d abändert. Modifikationen wurden an zwei Stellen benötigt: bei der Semantik quantifizierter Formeln und bei Substitutionen.

(a) [4 PUNKTE] Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Reihenfolge der Modifikationen $\{x_i/t_i\}$, $i < k$, bei der Definition von Substitutionen keine Rolle spielt.

(b) [6 PUNKTE] In der VL wurde behauptet, dass für jede Formel $A \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ und $x \neq y$ gilt

$$\forall x\, \forall y\, A \;\mathrel{\models\!\!\!\dashv}\; \forall y\, \forall x\, A$$

Beweisen Sie diese Tatsache. Was ist der entscheidende Punkt des Beweises?

(c) [2 PUNKTE] Kann angesichts der obigen Ergebnisse $\boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, \mathcal{V})$ der Wertebereich einer $\mathcal{S}$-Struktur sein?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Behauptung ist falsch: Falls $\{f_{/1}, g_{/2}\} \subseteq \boldsymbol{Fun}$, betrachte die Modifikationen $\{x, f(y)\}$ und $\{y, f(z)\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x,y)\{x, f(y)\}\{y, f(z)\} &= g(f(y), y)\{y, f(z)\} = g(f(f(z)), f(z)) \\ g(x,y)\{y, f(z)\}\{x, f(y)\} &= g(x, f(z))\{x, f(y)\} = g(f(y), f(z)) \end{aligned}$$

(b) Für eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ und eine Belegung $\sigma \in D^{\mathcal{V}}$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\forall x\, \forall y\, A) &= \inf\{\, \inf\{\, \widehat{\sigma}\{x/d\}\{y/e\} \;:\; e \in D\,\} \;:\; d \in D\,\} \\ &= \inf\{\, \widehat{\sigma}\{x/d\}\{y/e\} \;:\; \langle d, e \rangle \in D \times D\,\} \\ &= \inf\{\, \widehat{\sigma}\{y/e\}\{x/d\} \;:\; \langle d, e \rangle \in D \times D\,\} \\ &= \inf\{\, \inf\{\, \widehat{\sigma}\{y/e\}\{x/d\} \;:\; d \in D\,\} \;:\; e \in D\,\} \\ &= \hat{\sigma}(\forall y\, \forall x\, A) \end{aligned}$$

Entscheident ist, dass die Modifikationen $\{x/d\}$ und $\{y/e\}$ in beliebiger Reihenfolge (und damit auch parallel) durchgeführt werden können.

(c) Die Menge $\boldsymbol{Term}(\boldsymbol{Fun}, \mathcal{V}))$ aller $\boldsymbol{Fun}$-Terme kann wegen Teil (a) nicht Trägermenge einer $\mathcal{S}$-Struktur sein. Da solch ein Problem aber nur bei variablen-behafteten Termen auftreten kann, bestehen keine Einwände gegen die Trägermenge $D_{\mathcal{H}}$.

Aufgabe 9 [12 PUNKTE]

Kompaktheitssatz der PL:

Wir betrachten eine Signatur $\mathcal{S}$ und eine prädikatenlogische Formel $A \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}_n = \langle D_n, I_n \rangle$ mit $|D_n| > n$, d.h., die Trägermenge D_n hat mehr als n Elemente.

(a) [4 PUNKTE] Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel $B_n \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$ an, so dass für jede $\mathcal{S}$-Strultur $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ gilt:

$$\models_{\mathcal{M}} B_n \quad \text{gdw.} \quad |D| > n$$

(b) [4 PUNKTE] Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes , dass die Menge

$$\Gamma := \{\, A \wedge B_n \; : \; n \in \mathbb{N} \,\}$$

erfüllbar ist.

(c) [2 PUNKTE] Zeigen Sie, dass A ein Modell mit unendlicher Trägermenge besitzt.

(d) [2 PUNKTE] Schließen Sie daraus, dass für jede Formel $C \in \boldsymbol{FO}(\mathcal{S})$, die nur Modelle mit endlichen Trägermengen hat, die Größe dieser Trägermengen durch eine natürliche Zahl n_C beschränkt ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Wähle B_0 beliebig, da unsere Wertebereiche D nicht leer sein dürfen.

$$\begin{aligned} B_1 &= \exists x_0 \, \exists x_1 . \neg(x_0 \doteq x_1) \\ B_2 &= \exists x_0 \, \exists x_1 . \neg(x_0 \doteq x_1) \wedge \neg(x_0 \doteq x_2) \wedge \neg(x_1 \doteq x_2) \\ B_{n+1} &= \exists x_0 \, \ldots \, \exists x_{n+1} . \bigwedge_{0 \leq i < j \leq n+1} \neg(x_i \doteq x_j) \end{aligned}$$

Achtung: für $n = 4$ reicht es nicht aus $\neg(x_0 \doteq x_1)$, $\neg(x_1 \doteq x_2)$, $\neg(x_2 \doteq x_3)$ und $\neg(x_3 \doteq x_0)$ zu verlangen, denn dann könnte immer noch $x_0 \doteq x_2$ oder $x_1 \doteq x_3$ gelten! Die Relation $\neq$ ist *nicht* transitiv.

(b) Γ ist endlich erfüllbar: in einer endlichen Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ sei m der maximale Index, mit dem B versehen ist. Da der Träger von $\mathcal{M}_m$ mehr als m Elemente hat, ist $\mathcal{M}_m$ Modell für Δ.

Somit ist nach dem Kompaktheitssatz auch Γ erfüllbar.

(c) Jede $\mathcal{S}$-Struktur, die Γ erfüllt, hat unendlich viele Elemente und erfüllt A.

(d) Klar, andernfalls könnten wir C wie A behandeln.

Aufgabe 10 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie mit Hilfe eines Tableaus die Allgemeingültigkeit von

$$\Big(\forall x\, \forall y.\, \big(\neg\neg P(x,y) \to P(y,x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x,y)\Big) \to \forall x\, \exists y.\, P(y,x)$$

Lösungsvorschlag:

Beachte, dass doppelte Negationen sofort entfernt werden dürfen. Damit besagt die Behauptung, dass für eine symmetrische totale Relation auch die duale Relation total ist, was zumindest plausibel klingt.

Formal ist die Behauptung äquivalent zur Unerfüllbarkeit der Menge

$$\Gamma = \{\forall x\, \forall y.\, \big(P(x,y) \to P(y,x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x,y), \neg\forall x\, \exists y.\, P(y,x)\}$$

$$\begin{array}{c}
\star\ \ \forall x\, \forall y.\, \big(P(x,y) \to P(y,x)\big) \wedge \forall x\, \exists y.\, P(x,y) \quad 2 \\
| \\
\star\ \ \neg\forall x\, \exists y.\, P(y,x) \quad 0 \\
| \\
0\delta\ \ \neg\exists y.\ P(y,a) \quad 1 \\
| \\
1\gamma\ \ \neg P(a,a) \\
| \\
2a\ \ \forall x\, \forall y.\, \big(P(x,y) \to P(y,x)\big) \quad 5 \\
| \\
2b\ \ \forall x\, \exists y.\, P(x,y) \quad 3 \\
| \\
3\gamma\ \ \exists y.\, P(a,y) \quad 4 \\
| \\
4\delta\ \ P(a,b) \\
| \\
5\gamma\ \ P(a,b) \to P(b,a) \quad 6 \\
\begin{array}{cc}
6a\ \ \neg P(a,b) & 6b\ \ P(b,a) \\
 & | \\
 & 1\gamma\ \ \neg P(b,a)
\end{array}
\end{array}$$

Die erste Instanz von 1γ, $\neg P(a,a)$ stellt sich nachträglich als überflüssig heraus und kann entfernt werden.

Aufgabe 11 [12 PUNKTE]

Bestimmen Sie den MGU für

$$P\big(x, f(x), h(y)\big) \quad P\big(g(z,a), y, w\big) \quad P\Big(g(b,u), f(s), h\big(f(s)\big)\Big)$$

Lösungsvorschlag:

Klausel	Klausel	Klausel	Modifikation
$P\big(x, f(x), h(y)\big)$	$P\big(g(z,a), y, w\big)$	$P\Big(g(b,u), f(s), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{x/g(z,a)\}$
$P\Big(g(z,a), f\big(g(z,a)\big), h(y)\Big)$	$P\big(g(z,a), y, w\big)$	$P\Big(g(b,u), f(s), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{z/b\}$
$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h(y)\Big)$	$P\big(g(b,a), y, w\big)$	$P\Big(g(b,u), f(s), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{u/a\}$
$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h(y)\Big)$	$P\big(g(b,a), y, w\big)$	$P\Big(g(b,a), f(s), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{y/f\big(g(b,a)\big)\}$
$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h(y)\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), w\Big)$	$P\Big(g(b,a), f(s), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{s/f\big(g(b,a)\big)\}$
$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h(y)\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), w\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{w/h(y)\}$
$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h(y)\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h(y)\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h\big(f(s)\big)\Big)$	$\{y/f(s)\}$
$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h\big(f(s)\big)\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h\big(f(s)\big)\Big)$	$P\Big(g(b,a), f\big(g(b,a)\big), h\big(f(s)\big)\Big)$	

Aufgabe 12 [12 PUNKTE]

Zeigen Sie unter Verwendung der prädikatenlogischen Tableau-Methode, dass folgende Formel nicht erfüllbar ist:

$$\neg\Big[\Big(\forall x.\,\big(P(x)\to\neg P\big(f(x)\big)\big)\wedge\exists y.\,\big(\neg P\big(f(y)\big)\to P(y)\big)\Big)\to\exists z.\,\big(P(z)\wedge\neg P\big(f(z)\big)\big)\Big]$$

Lösungsvorschlag:

Eliminierung der Implikation und De Morgan liefert

$$\forall x.\,\big(P(x)\to\neg P\big(f(x)\big)\big)\wedge\exists y.\,\big(\neg P\big(f(y)\big)\to P(y)\big)\wedge\forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P\big(f(z)\big)\big)$$

$\star$ $\forall x.\,\big(P(x)\to\neg P\big(f(x)\big)\big)\wedge\exists y.\,\big(\neg P\big(f(y)\big)\to P(y)\big)\wedge\forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P\big(f(z)\big)\big)$ 0

- $0a$ $\forall x.\,\big(P(x)\to\neg P\big(f(x)\big)\big)$ 3
- $0b$ $\exists y.\,\big(\neg P\big(f(y)\big)\to P(y)\big)$ 1
- $0c$ $\forall z.\,\big(\neg P(z)\vee P\big(f(z)\big)\big)$ 5
- 1δ $\neg P\big(f(a)\big)\to P(a)$ 2
  - $2a$ $P\big(f(a)\big)$
    - 3γ $P(f(a))\to\neg P\big(f(f(a))\big)$ 4
      - $4a$ $\neg P(f(a))$
      - $4b$ $\neg P(f(f(a)))$
        - 5γ $\neg P(f(a))\vee P\big(f(f(a))\big)$ 6
          - $6a$ $\neg P(f(a))$
          - $6b$ $P(f(f(a)))$
  - $3b$ $P(a)$
    - 3γ $P(a)\to\neg P\big(f(a)\big)$ 7
      - $7a$ $\neg P(a)$
      - $7b$ $\neg P\big(f(a)\big)$
        - 5γ $\neg P(a)\vee P(f(a))$ 8
          - $8a$ $\neg P(a)$
          - $8b$ $P(f(a))$

Da (7b) im rechten Ast mit (3a) im linken Ast übereinstimmt, können wir auch den rechten Ast abschließen und sind damit fertig.