# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar. Zudem braucht die Familie mindestens ein Fortbewegungmittel.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar. Zudem braucht die Familie mindestens ein Fortbewegungmittel. Wenn sie auch in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar. Zudem braucht die Familie mindestens ein Fortbewegungmittel. Wenn sie auch in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten. Wenn sie nicht in den Urlaub fährt, muß sie aber ein Moped kaufen, um den Sohn zu besänftigen.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar. Zudem braucht die Familie mindestens ein Fortbewegungmittel. Wenn sie auch in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten. Wenn sie nicht in den Urlaub fährt, muß sie aber ein Moped kaufen, um den Sohn zu besänftigen.

- ▷ Zeigen Sie, dass Familie Z ein Moped und kein Auto anschafft, sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar. Zudem braucht die Familie mindestens ein Fortbewegungmittel. Wenn sie auch in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten. Wenn sie nicht in den Urlaub fährt, muß sie aber ein Moped kaufen, um den Sohn zu besänftigen.

- ▷ Zeigen Sie, dass Familie Z ein Moped und kein Auto anschafft, sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt.

Solche Probleme direkt anzugehen wird schnell unübersichtlich.

# Logisches Schließen: ein praktisches Beispiel

Familie Z will im kommenden Jahr eine Waschmaschine, ein Auto und ein Moped anschaffen. Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten. Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar. Zudem braucht die Familie mindestens ein Fortbewegungmittel. Wenn sie auch in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten. Wenn sie nicht in den Urlaub fährt, muß sie aber ein Moped kaufen, um den Sohn zu besänftigen.

- Zeigen Sie, dass Familie Z ein Moped und kein Auto anschafft, sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt.

Solche Probleme direkt anzugehen wird schnell unübersichtlich. Wir würden sie lieber mechanisch lösen, ohne weiter nachzudenken.

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- ▷ Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
  - $p$ – Erhalt eines Bonusses;

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- ▷ Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
  - $p$ – Erhalt eines Bonusses;
  - $q$ / $r$ / $s$ – Kauf einer Waschmaschine/eines Autos/eines Mopeds;

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- ▷ Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
  - $p$ – Erhalt eines Bonusses;
  - $q$ / $r$ / $s$ – Kauf einer Waschmaschine/eines Autos/eines Mopeds;
  - $t$ – Antritt einer Urlaubsreise.

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- ▷ Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
    - $p$ – Erhalt eines Bonusses;
    - $q$ / $r$ / $s$ – Kauf einer Waschmaschine/eines Autos/eines Mopeds;
    - $t$ – Antritt einer Urlaubsreise.
- ▷ Diese verknüpfen wir dann mit einigen logischen Junktoren

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- ▷ Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
  - $p$ – Erhalt eines Bonusses;
  - $q$ / $r$ / $s$ – Kauf einer Waschmaschine/eines Autos/eines Mopeds;
  - $t$ – Antritt einer Urlaubsreise.
- ▷ Diese verknüpfen wir dann mit einigen logischen Junktoren
  - $\neg$ – nicht (Negation) (unär)

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
  - $p$ – Erhalt eines Bonusses;
  - $q$ / $r$ / $s$ – Kauf einer Waschmaschine/eines Autos/eines Mopeds;
  - $t$ – Antritt einer Urlaubsreise.
- Diese verknüpfen wir dann mit einigen logischen Junktoren
  - $\neg$ – nicht (Negation) (unär)
  - $\wedge$ / $\vee$ – und / oder (Konjunktion / Disjunktion) (binär)

# Formalisierung, Teil 1: Ereignisse und JUnktoren

Zunächst wollen wir die relevanten Informationen extrahieren und miteinander in Beziehung setzen:

- Dazu führen wir für die diversen Ereignisse, die eintreten können oder nicht, Abkürzungen ein:
  - $p$ – Erhalt eines Bonusses;
  - $q$ / $r$ / $s$ – Kauf einer Waschmaschine/eines Autos/eines Mopeds;
  - $t$ – Antritt einer Urlaubsreise.
- Diese verknüpfen wir dann mit einigen logischen Junktoren
  - $\neg$ – nicht (Negation) (unär)
  - $\wedge$ / $\vee$ – und / oder (Konjunktion / Disjunktion) (binär)
  - $\rightarrow$ – wenn,dann (Implikation) (binär)

# Formalisierung, Teil 2: die Prämissen

# Formalisierung, Teil 2: die Prämissen

– „Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten.“”

$$B_0 = \neg p \to \neg(q \wedge r \wedge s)$$

# Formalisierung, Teil 2: die Prämissen

– „Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten.“”

$$B_0 = \neg p \to \neg(q \land r \land s)$$

– „Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar.“

$$B_1 = q$$

# Formalisierung, Teil 2: die Prämissen

– „Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten.“”

$$B_0 = \neg p \to \neg(q \wedge r \wedge s)$$

– „Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar.“

$$B_1 = q$$

– „Die Familie braucht mindestens ein Fortbewegungsmittel.“

$$B_2 = r \vee s$$

# Formalisierung, Teil 2: die Prämissen

- „Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten.“ ”

$$B_0 = \neg p \to \neg(q \wedge r \wedge s)$$

- „Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar.“

$$B_1 = q$$

- „Die Familie braucht mindestens ein Fortbewegungsmittel.“

$$B_2 = r \vee s$$

- „Wenn sie in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten.“

$$B_3 = t \to \neg r$$

# Formalisierung, Teil 2: die Prämissen

- „Aber falls Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, können sie sich nicht alles leisten.“”

$$B_0 = \neg p \to \neg(q \wedge r \wedge s)$$

- „Die Waschmaschine ist aber unverzichtbar.“

$$B_1 = q$$

- „Die Familie braucht mindestens ein Fortbewegungsmittel.“

$$B_2 = r \vee s$$

- „Wenn sie in den Urlaub fahren will, kann sie sich kein Auto leisten.“

$$B_3 = t \to \neg r$$

- „Wenn sie nicht in den Urlaub fährt, muß sie ein Moped kaufen.“

$$B_4 = \neg t \to s$$

# Formalisierung, Teil 3: die Schlußfolgerung

Fraglich ist, ob aus der Wahrheit der Prämissen $B_i$, $i < 5$, auch die von

folgt,

# Formalisierung, Teil 3: die Schlußfolgerung

Fraglich ist, ob aus der Wahrheit der Prämissen $B_i$, $i < 5$, auch die von

– „Sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, schafft Familie Z ein Moped und kein Auto an.“

$$A = \neg p \to (\neg r \wedge s)$$

folgt,

# Formalisierung, Teil 3: die Schlußfolgerung

Fraglich ist, ob aus der Wahrheit der Prämissen $B_i$, $i < 5$, auch die von

– „Sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, schafft Familie Z ein Moped und kein Auto an."

$$A = \neg p \to (\neg r \wedge s)$$

folgt, formal geschrieben als

$$\{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4\} \models A \qquad (*)$$

# Formalisierung, Teil 3: die Schlußfolgerung

Fraglich ist, ob aus der Wahrheit der Prämissen $B_i$, $i < 5$, auch die von

– „Sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, schafft Familie Z ein Moped und kein Auto an.“

$$A = \neg p \to (\neg r \wedge s)$$

folgt, formal geschrieben als

$$\{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4\} \models A \tag{$*$}$$

Falls es eine Belegung der Atome gibt, die alle Prämissen wahr macht, dann gibt es unendlich viele davon, denn nur die Werte auf den 5 Variablen $p$, $q$, $r$, $s$ und $t$ sind für die Wahrheitswerte der Prämissen von Interesse.

# Formalisierung, Teil 3: die Schlußfolgerung

Fraglich ist, ob aus der Wahrheit der Prämissen $B_i$ , $i < 5$ , auch die von

– „Sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, schafft Familie Z ein Moped und kein Auto an.“

$$A = \neg p \to (\neg r \wedge s)$$

folgt, formal geschrieben als

$$\{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4\} \models A \tag{$*$}$$

Falls es eine Belegung der Atome gibt, die alle Prämissen wahr macht, dann gibt es unendlich viele davon, denn nur die Werte auf den 5 Variablen $p$ , $q$ , $r$ , $s$ und $t$ sind für die Wahrheitswerte der Prämissen von Interesse. Aber auch auf diesen sind unterschiedliche Belegungen denkbar.

# Formalisierung, Teil 3: die Schlußfolgerung

Fraglich ist, ob aus der Wahrheit der Prämissen $B_i$, $i < 5$, auch die von

- „Sofern Herr Z seinen üblichen Bonus nicht bekommt, schafft Familie Z ein Moped und kein Auto an.“

$$A = \neg p \to (\neg r \wedge s)$$

folgt, formal geschrieben als

$$\{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4\} \models A \qquad (*)$$

Falls es eine Belegung der Atome gibt, die alle Prämissen wahr macht, dann gibt es unendlich viele davon, denn nur die Werte auf den 5 Variablen $p$, $q$, $r$, $s$ und $t$ sind für die Wahrheitswerte der Prämissen von Interesse. Aber auch auf diesen sind unterschiedliche Belegungen denkbar.

Wir wollen aber darauf verzichten, $2^5 = 32$ Fälle durchzurechnen.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können,

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

- Die Tableau-Methode zerlegt Formeln in $\Delta$ in Teilformeln, aus denen ein im Wesentlichen binärer Baum aufgebaurt wird.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

- Die Tableau-Methode zerlegt Formeln in $\Delta$ in Teilformeln, aus denen ein im Wesentlichen binärer Baum aufgebaurt wird. Zweige, entlang derer Widersprüche auftreten, werden von der weiteren Bearbeitung ausgeschlossen.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

- Die Tableau-Methode zerlegt Formeln in $\Delta$ in Teilformeln, aus denen ein im Wesentlichen binärer Baum aufgebaurt wird. Zweige, entlang derer Widersprüche auftreten, werden von der weiteren Bearbeitung ausgeschlossen. Sobald keine bearbeitbaren Zweige mehr übrig sind, ist $\Delta$ unerfüllbar.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

- Die Tableau-Methode zerlegt Formeln in $\Delta$ in Teilformeln, aus denen ein im Wesentlichen binärer Baum aufgebaurt wird. Zweige, entlang derer Widersprüche auftreten, werden von der weiteren Bearbeitung ausgeschlossen. Sobald keine bearbeitbaren Zweige mehr übrig sind, ist $\Delta$ unerfüllbar.
- Die Resolutionsmethode erfordert die Umformung der Formeln in $\Delta$ in sog. konjunktive Normalform.

# Semantische Umformungen

Laut VL ist $(*)$ äquivalent ist zur Unerfüllbarkeit von

$$\Delta = \{B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, \neg A\}$$

[Kap. 7] stellt verschiedene Algorithmen vor, die die Unerfüllbarkeit in endlich vielen Schritten feststellen können, sogar falls $\Gamma$ unendlich ist.

- Die Tableau-Methode zerlegt Formeln in $\Delta$ in Teilformeln, aus denen ein im Wesentlichen binärer Baum aufgebaurt wird. Zweige, entlang derer Widersprüche auftreten, werden von der weiteren Bearbeitung ausgeschlossen. Sobald keine bearbeitbaren Zweige mehr übrig sind, ist $\Delta$ unerfüllbar.
- Die Resolutionsmethode erfordert die Umformung der Formeln in $\Delta$ in sog. konjunktive Normalform. Das obige Problem läßt sich damit relativ schnell lösen.

# Beweisen Teil 1: Objekte, Aussagen und Ergebnisse

Wir sprechen zumeist über

# Beweisen Teil 1: Objekte, Aussagen und Ergebnisse

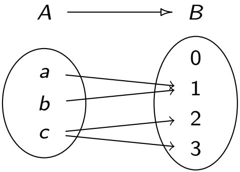
Wir sprechen zumeist über

- Mengen und deren Elemente $x \in A$;

# Beweisen Teil 1: Objekte, Aussagen und Ergebnisse

Wir sprechen zumeist über

- Mengen und deren Elemente $x \in A$;
- Relationen $R \subseteq A \times B$

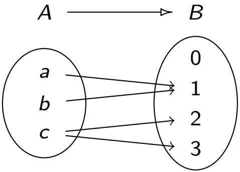



$$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

# Beweisen Teil 1: Objekte, Aussagen und Ergebnisse

Wir sprechen zumeist über

- Mengen und deren Elemente $x \in A$;
- Relationen $R \subseteq A \times B$



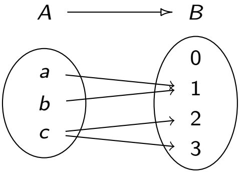

$$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

Ist $A \,/\, B$ ein Singleton, fasst man $R$ als Teilmenge von $B \,/\, A$ auf.

# Beweisen Teil 1: Objekte, Aussagen und Ergebnisse

Wir sprechen zumeist über

- ▷ Mengen und deren Elemente $x \in A$;
- ▷ Relationen $R \subseteq A \times B$




$$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$$

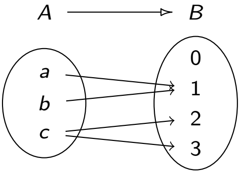
Ist $A\,/\,B$ ein Singleton, fasst man $R$ als Teilmenge von $B\,/\,A$ auf.

- ▷ Funktionen $A \xrightarrow{f} B$, (links-)totale und (rechts-)einwertige Relationen.

# Beweisen Teil 1: Objekte, Aussagen und Ergebnisse

Wir sprechen zumeist über

- ▷ Mengen und deren Elemente $x \in A$;
- ▷ Relationen $R \subseteq A \times B$




$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$

Ist $A \,/\, B$ ein Singleton, fasst man $R$ als Teilmenge von $B \,/\, A$ auf.

- ▷ Funktionen $A \xrightarrow{f} B$, (links-)totale und (rechts-)einwertige Relationen.

Im Prinzip sind Relationen und Funktionen auch bloß Mengen. (Solch Reduktionismus birgt die Gefahr, konzeptionelle Unterschiede zu verwischen).

Die zu beweisenden Aussagen sind in der Regel Aussagen über Mengen:

Die zu beweisenden Aussagen sind in der Regel Aussagen über Mengen:

- Inklusionen: $A \subseteq B$, definitionsgemäß gdw.

$$\forall x.\, x \in A \to x \in B \;\; \text{(PL)} \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in A.\, x \in B \;\; \text{(Praxis)}$$

Die zu beweisenden Aussagen sind in der Regel Aussagen über Mengen:

- ▷ Inklusionen: $A \subseteq B$, definitionsgemäß gdw.

$$\forall x.\, x \in A \to x \in B \ \text{(PL)} \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in A.\, x \in B \ \text{(Praxis)}$$

- ▷ Gleichheiten: $A = B$ gdw. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, s.o.

Die zu beweisenden Aussagen sind in der Regel Aussagen über Mengen:

- Inklusionen: $A \subseteq B$, definitionsgemäß gdw.

$$\forall x.\, x \in A \to x \in B \ \text{(PL)} \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in A.\, x \in B \ \text{(Praxis)}$$

- Gleichheiten: $A = B$ gdw. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, s.o.
- Eigenschaften: es besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen Teilmengen $P \subseteq A$ (oder $A \xrightarrow{P} 1$) und ihren charakteristischen Funktionen $A \xrightarrow{P} 2 = \{0, 1\} =: \mathbb{B}$ (daher dasselbe Symbol $P$).

Die zu beweisenden Aussagen sind in der Regel Aussagen über Mengen:

- ▷ Inklusionen: $A \subseteq B$, definitionsgemäß gdw.

$$\forall x.\, x \in A \to x \in B \ \text{(PL)} \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in A.\, x \in B \ \text{(Praxis)}$$

- ▷ Gleichheiten: $A = B$ gdw. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, s.o.
- ▷ Eigenschaften: es besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen Teilmengen $P \subseteq A$ (oder $A \xrightarrow{P} 1$) und ihren charakteristischen Funktionen $A \xrightarrow{P} 2 = \{0,1\} =: \mathbb{B}$ (daher dasselbe Symbol $P$). Manche definieren $\mathbb{B}$ als $\{\boldsymbol{\mathit{false}}, \boldsymbol{\mathit{true}}\}$.

Die zu beweisenden Aussagen sind in der Regel Aussagen über Mengen:

- Inklusionen: $A \subseteq B$, definitionsgemäß gdw.

$$\forall x.\, x \in A \to x \in B \;\text{ (PL)} \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in A.\, x \in B \;\text{ (Praxis)}$$

- Gleichheiten: $A = B$ gdw. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, s.o.
- Eigenschaften: es besteht eine bijektive Korrespondenz zwischen Teilmengen $P \subseteq A$ (oder $A \xrightarrow{P} 1$) und ihren charakteristischen Funktionen $A \xrightarrow{P} 2 = \{0,1\} =: \mathbb{B}$ (daher dasselbe Symbol $P$). Manche definieren $\mathbb{B}$ als $\{\textbf{\textit{false}}, \textbf{\textit{true}}\}$. Aussagen der Form „Alle Elemente von $A$ haben die Eigenschaft $P$"/„$P$ ist nicht leer" kann man formal schreiben als

$$\forall x \in A.\ P(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x \in A.\ P(x)$$

Die erzielten Ergebnisse bezeichnet man gemäß ihrer Wichtigkeit als

Die erzielten Ergebnisse bezeichnet man gemäß ihrer Wichtigkeit als

- Lemma: einfache Aussage oder technische Hilfsaussage; beim Beweisen entsprechen Lemmata(!) den Prozeduren bim Programmieren.

Die erzielten Ergebnisse bezeichnet man gemäß ihrer Wichtigkeit als

- ▷ Lemma: einfache Aussage oder technische Hilfsaussage; beim Beweisen entsprechen Lemmata(!) den Prozeduren bim Programmieren.
- ▷ Proposition: Aussage von eigenständigem Interesse (aber nicht super wichtig)

Die erzielten Ergebnisse bezeichnet man gemäß ihrer Wichtigkeit als

- ▷ Lemma: einfache Aussage oder technische Hilfsaussage; beim Beweisen entsprechen Lemmata(!) den Prozeduren bim Programmieren.
- ▷ Proposition: Aussage von eigenständigem Interesse (aber nicht super wichtig)
- ▷ Satz: wichtige Aussage, der Beweis nutzt häufig vorher beweisene Lemmata und Propositionen.

Die erzielten Ergebnisse bezeichnet man gemäß ihrer Wichtigkeit als

- ▷ Lemma: einfache Aussage oder technische Hilfsaussage; beim Beweisen entsprechen Lemmata(!) den Prozeduren bim Programmieren.
- ▷ Proposition: Aussage von eigenständigem Interesse (aber nicht super wichtig)
- ▷ Satz: wichtige Aussage, der Beweis nutzt häufig vorher beweisene Lemmata und Propositionen.
- ▷ Korollar: unmittelbare Folgerung aus einem Lemma/einer Proposition/einem Satz.

# Beweisen Teil 2: Beweistechniken

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$ .

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$ . Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}} \quad \text{(von außen)}$$

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$ . Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}} \quad \text{(von außen)}$$

Gerade weil außer $v \in A$ nichts über $v$ bekannt ist, wird die folgende Argumentationskette für jedes ( $\forall$ ) Element von $A$ gelten

## Beweisen Teil 2: Beweistechniken

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$ . Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}}$ (von außen)

Gerade weil außer $v \in A$ nichts über $v$ bekannt ist, wird die folgende Argumentationskette für jedes ( $\forall$ ) Element von $A$ gelten

$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$

# Beweisen Teil 2: Beweistechniken

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$ . Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}} \quad \text{(von außen)}$$

Gerade weil außer $v \in A$ nichts über $v$ bekannt ist, wird die folgende Argumentationskette für jedes ( $\forall$ ) Element von $A$ gelten

$$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$$

**Umgang mit** $\exists x \in A.\, P(x)$ .

# Beweisen Teil 2: Beweistechniken

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$. Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}}$ (von außen)

Gerade weil außer $v \in A$ nichts über $v$ bekannt ist, wird die folgende Argumentationskette für jedes ($\forall$) Element von $A$ gelten

$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$

**Umgang mit** $\exists x \in A.\, P(x)$. Hier müssen Sie

$\boxed{\text{ein konkretes } v \text{ aus } A \text{ angeben}}$ (von innen)

## Beweisen Teil 2: Beweistechniken

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$. Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}}$ (von außen)

Gerade weil außer $v \in A$ nichts über $v$ bekannt ist, wird die folgende Argumentationskette für jedes ( $\forall$ ) Element von $A$ gelten

$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$

**Umgang mit** $\exists x \in A.\, P(x)$. Hier müssen Sie

$\boxed{\text{ein konkretes } v \text{ aus } A \text{ angeben}}$ (von innen)

Für dieses eine ( $\exists$ ) $v$ muß man in der folgenden Argumentationskette

$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$

# Beweisen Teil 2: Beweistechniken

**Umgang mit** $\forall x \in A.\, P(x)$. Man instanziiert die Variable $x$ durch ein generisches Element $v$ von $A$, über das wir sonst nichts wissen, etwa

$$\boxed{\text{Sei } v \text{ aus } A \text{ gegeben.}} \quad \text{(von außen)}$$

Gerade weil außer $v \in A$ nichts über $v$ bekannt ist, wird die folgende Argumentationskette für jedes ( $\forall$ ) Element von $A$ gelten

$$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$$

**Umgang mit** $\exists x \in A.\, P(x)$. Hier müssen Sie

$$\boxed{\text{ein konkretes } v \text{ aus } A \text{ angeben}} \quad \text{(von innen)}$$

Für dieses eine ( $\exists$ ) $v$ muß man in der folgenden Argumentationskette

$$\boxed{\text{zeigen, dass } P(v) \text{ gilt.}}$$

Dabei kann man alle speziellen Eigenschaften des gewählten $v$ ausnutzen.

**Zeigen, dass** $P(v)$ **gilt**:

**Zeigen, dass $P(v)$ gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;

**Zeigen, dass** $P(v)$ **gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, dass** $P(v)$ **gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus** $P(v)$ **folgt** $Q(v)$**, oder** $P(v) \to Q(v)$: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$ ).

**Zeigen, dass $P(v)$ gilt**:

- $\triangleright$ die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- $\triangleright$ kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus $P(v)$ folgt $Q(v)$, oder $P(v) \to Q(v)$**: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- $\triangleright$ direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen,

**Zeigen, dass $P(v)$ gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus $P(v)$ folgt $Q(v)$, oder $P(v) \rightarrow Q(v)$**: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen, kleinschrittig umformen, bis $Q(v)$ erreicht ist;

**Zeigen, dass** $P(v)$ **gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus** $P(v)$ **folgt** $Q(v)$**, oder** $P(v) \rightarrow Q(v)$: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen, kleinschrittig umformen, bis $Q(v)$ erreicht ist;
- indirekt, durch sog. Kontraposition:

**Zeigen, dass $P(v)$ gilt**:

- ▷ die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- ▷ kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus $P(v)$ folgt $Q(v)$, oder $P(v) \to Q(v)$**: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- ▷ direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen, kleinschrittig umformen, bis $Q(v)$ erreicht ist;
- ▷ indirekt, durch sog. Kontraposition: Wenn $Q(v)$ falsch ist, darf $P(v)$ nicht wahr sein, also zeigt man anstelle der urpsprünglichen Aussage stattdessen $\neg Q(v) \to \neg P(v)$.

**Zeigen, dass $P(v)$ gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus $P(v)$ folgt $Q(v)$, oder $P(v) \to Q(v)$**: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen, kleinschrittig umformen, bis $Q(v)$ erreicht ist;
- indirekt, durch sog. Kontraposition: Wenn $Q(v)$ falsch ist, darf $P(v)$ nicht wahr sein, also zeigt man anstelle der urpsprünglichen Aussage stattdessen $\neg Q(v) \to \neg P(v)$.
- durch Widerspruch: Wäre die Implikation falsch, müßte $P(v) \wedge \neg Q(v)$ gelten.

**Zeigen, dass $P(v)$ gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus $P(v)$ folgt $Q(v)$, oder $P(v) \to Q(v)$**: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen, kleinschrittig umformen, bis $Q(v)$ erreicht ist;
- indirekt, durch sog. Kontraposition: Wenn $Q(v)$ falsch ist, darf $P(v)$ nicht wahr sein, also zeigt man anstelle der urpsprünglichen Aussage stattdessen $\neg Q(v) \to \neg P(v)$.
- durch Widerspruch: Wäre die Implikation falsch, müßte $P(v) \wedge \neg Q(v)$ gelten. Ausgehend von dieser Annahme und den entsprechenden Definitionen einen Widerspruch finden (etwa $0 = 1$, oder $a \in \emptyset$, oder $\mathbb{N}$ ist endlich...)

**Zeigen, dass** $P(v)$ **gilt**:

- die Definition von $P(x)$ einsetzen;
- kleinschrittig argumentieren, so dass jeder Schritt leicht einsichtig aus dem vorheigen folgt.

**Zeigen, aus** $P(v)$ **folgt** $Q(v)$**, oder** $P(v) \to Q(v)$: (die Eigenschaft $P$ ist Teilmenge der Eigenschaft $Q$).

- direkt: Definition von $P(v)$ einsetzen, kleinschrittig umformen, bis $Q(v)$ erreicht ist;
- indirekt, durch sog. Kontraposition: Wenn $Q(v)$ falsch ist, darf $P(v)$ nicht wahr sein, also zeigt man anstelle der urpsprünglichen Aussage stattdessen $\neg Q(v) \to \neg P(v)$.
- durch Widerspruch: Wäre die Implikation falsch, müßte $P(v) \wedge \neg Q(v)$ gelten. Ausgehend von dieser Annahme und den entsprechenden Definitionen einen Widerspruch finden (etwa $0 = 1$, oder $a \in \emptyset$, oder $\mathbb{N}$ ist endlich...) Dann war die Annahme falsch, die Implikation also richtig (gilt nur klassisch, nicht intuitionistisch!).

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \to B$ und $B \to C$ und $C \to A$ verwenden.

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \to B$ und $B \to C$ und $C \to A$ verwenden.

**Zeigen, dass eine Aussage $A$ nicht gilt**: Ein Gegenbeispiel angeben.

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \to B$ und $B \to C$ und $C \to A$ verwenden.

**Zeigen, dass eine Aussage $A$ nicht gilt**: Ein Gegenbeispiel angeben.

### Anmerkungen

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \to B$ und $B \to C$ und $C \to A$ verwenden.

**Zeigen, dass eine Aussage $A$ nicht gilt**: Ein Gegenbeispiel angeben.

## Anmerkungen

- Beweisen ist ein Handwerk, das historisch gewachsen ist, im Lauf der Zeit verfeinert wurde, und dessen zulässige Werkzeuge (Schlußregeln) auf der Überkeinkunft von Mathematikern und Logikern beruhen (Politiker und Juristen sind ausdrücklich ausgenommen).

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \to B$ und $B \to C$ und $C \to A$ verwenden.

**Zeigen, dass eine Aussage $A$ nicht gilt**: Ein Gegenbeispiel angeben.

### Anmerkungen

- Beweisen ist ein Handwerk, das historisch gewachsen ist, im Lauf der Zeit verfeinert wurde, und dessen zulässige Werkzeuge (Schlußregeln) auf der Überkeinkunft von Mathematikern und Logikern beruhen (Politiker und Juristen sind ausdrücklich ausgenommen).
- Mit formaler Beweistherorie werden wir uns ab Kapitel 4 befassen; "working mathematicians" kommunizieren meist informeller wie oben, was sich im Prinzip aber immer formalisieren lassen muß.

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \to B$ und $B \to C$ und $C \to A$ verwenden.

**Zeigen, dass eine Aussage $A$ nicht gilt**: Ein Gegenbeispiel angeben.

## Anmerkungen

- Beweisen ist ein Handwerk, das historisch gewachsen ist, im Lauf der Zeit verfeinert wurde, und dessen zulässige Werkzeuge (Schlußregeln) auf der Überkeinkunft von Mathematikern und Logikern beruhen (Politiker und Juristen sind ausdrücklich ausgenommen).
- Mit formaler Beweistherorie werden wir uns ab Kapitel 4 befassen; “working mathematicians” kommunizieren meist informeller wie oben, was sich im Prinzip aber immer formalisieren lassen muß.
- Beweisen wird durch Übung leichter.

**Zeigen, dass Aussagen $A$, $B$ und $C$ äquivalent ($\leftrightarrow$) sind**: Man kann einen Ringschluß der Form $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ und $C \rightarrow A$ verwenden.

**Zeigen, dass eine Aussage $A$ nicht gilt**: Ein Gegenbeispiel angeben.

### Anmerkungen

- Beweisen ist ein Handwerk, das historisch gewachsen ist, im Lauf der Zeit verfeinert wurde, und dessen zulässige Werkzeuge (Schlußregeln) auf der Überkeinkunft von Mathematikern und Logikern beruhen (Politiker und Juristen sind ausdrücklich ausgenommen).
- Mit formaler Beweistherorie werden wir uns ab Kapitel 4 befassen; "working mathematicians" kommunizieren meist informeller wie oben, was sich im Prinzip aber immer formalisieren lassen muß.
- Beweisen wird durch Übung leichter.
- Beweisen schult folgerichtiges Denken und Abstraktionsvermögen.

# Beweisen Teil 3: ein Beispiel

**Lemma**

*Jede Formelmenge* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ *ist in ihrer Folge-Hülle* $\Gamma^{\rhd\lhd}$ *enthalten.*

# Beweisen Teil 3: ein Beispiel

**Lemma**

*Jede Formelmenge* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ *ist in ihrer Folge-Hülle* $\Gamma^{\triangleright\triangleleft}$ *enthalten.*

**Beweis.**

Um $\Gamma \subseteq \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$ zu zeigen,

brauchen wir die Definition von $\subseteq$.

# Beweisen Teil 3: ein Beispiel

**Lemma**

*Jede Formelmenge* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ *ist in ihrer Folge-Hülle* $\Gamma^{\triangleright\triangleleft}$ *enthalten.*

**Beweis.**

Um $\Gamma \subseteq \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$ zu zeigen,

brauchen wir die Definition von $\subseteq$.

$$\forall A \in \Gamma.\, A \in \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$$

# Beweisen Teil 3: ein Beispiel

**Lemma**

*Jede Formelmenge* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{A}]$ *ist in ihrer Folge-Hülle* $\Gamma^{\triangleright\triangleleft}$ *enthalten.*

**Beweis.**

Um $\Gamma \subseteq \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$ zu zeigen,

brauchen wir die Definition von $\subseteq$.

$$\forall A \in \Gamma.\, A \in \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$$

Der All-Quantor motiviert den nächsten Satz.

Sei eine Formel $B \in \Gamma$ gegeben. Nachzuweisen ist $B \in \Gamma^{\triangleright\triangleleft}$.

Nun brauchen wir die Definition von $c\Gamma^{\triangleright\triangleleft}$.

$$\begin{aligned}\Gamma^{\triangleright\triangleleft} &= \{\, \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}} : \forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1 \,\}^{\triangleleft} \\ &= \left\{\, C \in \mathcal{F}[\mathcal{A}] : \forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(C) = 1 \,\right\}\end{aligned}$$

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}. \big(\forall A \in \Gamma. \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

**Direkt**: Falls $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$, müssen wir $\hat{\psi}(B) = 1$ zeigen.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

**Direkt**: Falls $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$, müssen wir $\hat{\psi}(B) = 1$ zeigen.

Jetzt ist zum ersten Mal ein eigener Schluß zu ziehen;
der Rest des Beweises war rein mechanisch.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

**Direkt**: Falls $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$, müssen wir $\hat{\psi}(B) = 1$ zeigen.

Jetzt ist zum ersten Mal ein eigener Schluß zu ziehen;
der Rest des Beweises war rein mechanisch.

Wegen $B \in \Gamma$ gilt nach Voraussetzung $\hat{\psi}(B) = 1$.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}} .\, \big( \forall A \in \Gamma .\, \hat{\varphi}(A) = 1 \big) \to \hat{\varphi}(B) = 1 \big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

**Direkt**: Falls $\forall A \in \Gamma .\, \hat{\psi}(A) = 1$, müssen wir $\hat{\psi}(B) = 1$ zeigen.

Jetzt ist zum ersten Mal ein eigener Schluß zu ziehen;
der Rest des Beweises war rein mechanisch.

Wegen $B \in \Gamma$ gilt nach Voraussetzung $\hat{\psi}(B) = 1$.

**Kontraposition**: Falls $\hat{\psi}(B) = 0$, existiert wegen $B \in \Gamma$ eine Formel in $\Gamma$, die $\psi$ nicht erfüllt, was linke Seite der Implikation negiert.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

**Direkt**: Falls $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$, müssen wir $\hat{\psi}(B) = 1$ zeigen.

Jetzt ist zum ersten Mal ein eigener Schluß zu ziehen;
der Rest des Beweises war rein mechanisch.

Wegen $B \in \Gamma$ gilt nach Voraussetzung $\hat{\psi}(B) = 1$.

**Kontraposition**: Falls $\hat{\psi}(B) = 0$, existiert wegen $B \in \Gamma$ eine Formel in $\Gamma$, die $\psi$ nicht erfüllt, was linke Seite der Implikation negiert.

**Durch Widerspruch**: Annahme: $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$ und $\hat{\psi}(B) = 0$.

## Beweis, Fortsetzung.

Nun müssen wir zeigen

$$\forall \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}.\, \big(\forall A \in \Gamma.\, \hat{\varphi}(A) = 1\big) \to \hat{\varphi}(B) = 1\big)$$

Der All-Quantor motiviert wieder den nächsten Satz.

Sei $\psi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$ gegeben.

Um eine Implikation zu zeigen, gab es drei Möglichkeiten.

**Direkt**: Falls $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$, müssen wir $\hat{\psi}(B) = 1$ zeigen.

Jetzt ist zum ersten Mal ein eigener Schluß zu ziehen;
der Rest des Beweises war rein mechanisch.

Wegen $B \in \Gamma$ gilt nach Voraussetzung $\hat{\psi}(B) = 1$.

**Kontraposition**: Falls $\hat{\psi}(B) = 0$, existiert wegen $B \in \Gamma$ eine Formel in $\Gamma$, die $\psi$ nicht erfüllt, was linke Seite der Implikation negiert.

**Durch Widerspruch**: Annahme: $\forall A \in \Gamma.\, \hat{\psi}(A) = 1$ und $\hat{\psi}(B) = 0$.
Wegen $B \in \Gamma$ muß aber auch $\hat{\psi}(B) = 1$ gelten, Widerspruch.