Einführung in die Logik

Aufgabenblatt 0, 2023-04-10

Bitte geben Sie die Aufgaben online im PDF-Format ab, versehen mit mindestens einer Email-Adresse, damit die kommentierten PDFs zurückgeschickt werden können.

Anmerkung: Auch im Englischen wird dem Begriff der “total relation”, wie ich ihn kenne und ursprünglich auf Folie 23 eingeführt habe, inzwischen wohl der Begriff “entire relation” vorgezogen, vergl. ncatlab. Dort wird auch die Kollision mit dem Begriff der totalen Ordnung erwähnt, die ich bisher als „lineare Ordnung“ bezeichnet hatte. Auf Deutsch entspricht einer “entire relation” wohl am ehesten eine „volle Relation“.

Um dieses Mißverständnis auszuräumen, habe ich die Folien entsprechend abgeändert. Man beachte:

- Der Begriff „voll“ (bisher „total“) bezieht sich auf beliebige Relationen $A \xrightarrow{R} B$, während das neue „total“ (bisher „linear“) nur im Fall $A = B$ Sinn ergibt.
- Häufig wird von „totalen Funktionen“ gesprochen, wenn bei bei a priori partiellen Funktionen betont werden soll, dass sie doch auf gesamten Startmenge definiert sind.

In der ersten großen Übung am kommenden Montag werden einige allgemeine Beweisverfahren vorgestellt.

Präsenzaufgabe 1

Auseinandersetzung mit Anhang B, Abzählbarkeit.

Alternative Charakterisierung der Abzählbarkeit: Wir verwenden einen Ringschluss zum Beweis des Satzes auf Folie 292 in Anhang B:

Folgende Bedingungen für sind äquivalent für eine Menge B:

(a) B ist abzählbar.

(b) $B = \emptyset$ oder es gibt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$.

(c) Es gibt eine surjektive *partielle* Abbildung (= einwertige Relation, nicht notwendig total) $\mathbb{N} \xrightarrow{h} B$.

Lösungsvorschlag:

(a) ⇒ (b). Falls $\emptyset \neq B \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ injektiv ist, so wähle $b_0 \in B$ und definiere $\mathbb{N} \xrightarrow{g} B$ wie folgt

$$g(n) := \begin{cases} b & \text{falls } f(b) = n \\ b_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist g total und wegen der Injektivität von f auch einwertig. Da f total war, ist g surjektiv.

(b) $\Rightarrow$ (c). Jede surjektive Abbildung ist auch eine surjektive partielle Abbildung, was den Fall $B \neq \emptyset$ erledigt. Andernfalls ist die leere Teilmenge $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \times \emptyset$ eine, zugegeben pathologische, surjektive partielle Abbildung.

(c) $\Rightarrow$ (a). Wegen der Surjektivität hat jedes $b \in B$ ein nichtleeres Urbild $\emptyset \neq g^{-1}(b) \subseteq \mathbb{N}$. Daraus wählen wir eine Zahl $f(b)$ aus, etwa die kleinste Zahl. Die Totalität und Einwertigkeit von f sind klar. Da für $b \neq c \in \mathbb{N}$ die g-Urbilder disjunkt sind, ist f in der Tat injektiv.

Präsenzaufgabe 2

Vorbemerkung: Sofern Sie in Niedersachsen das Gymnasium besucht haben, dürfte Ihnen etwa in der 7. Klasse der Begriff „Zuordnung“ begegnet sein. Da man zu der Zeit ohnehin nur mit Zahlen arbeitete, wurden für eine Zuordnung z die beiden Mengen

- A, derjenigen Elemente, *denen etwas zugeordnet wird*; und
- B, derjenigen Elemente, *die potentiell zugeordnet werden*

vermutlich nicht explizit erwähnt. Weiter wurde evtl. unterschlagen, *wieviele* Elemente aus B einem einzelnen Element $a \in A$ zugeordnet werden dürfen. Sofern das in späteren Klassen nicht präzisiert wurde, stellen wir sicherheitshalber fest:

Wird jedem $a \in A$ durch z

- eine *beliebige Menge von Elementen* aus B zugeordnet (die auch leer sein darf), so handelt es sich bei z um eine *Relation* $A \xrightarrow{z} B$;
- *genau ein Element* aus B zugeordnet, das häufig mit $z(a)$ bezeichnet wird, so handelt es sich bei z um eine *Funktion* $A \xrightarrow{z} B$;
- *höchstens ein Element* aus B zugeordnet, so handelt es sich bei z um eine *partielle Funktion* $A \xrightarrow{z} B$.

Elementfreie Charakterisierung von Funktionen: Zeigen Sie, dass eine Relation $A \xrightarrow{R} B$ genau dann eine Funktion ist, wenn eine Relation $B \xrightarrow{S} A$ existiert mit $\boldsymbol{id}_A \subseteq R;S$ und $S;R \subseteq \boldsymbol{id}_B$. (Kann man genaueres über S sagen?)

Lösungsvorschlag:

($\Longrightarrow$) Für eine Funktion $A \xrightarrow{f} B$ wähle $S := f^{\mathrm{op}}$. Dann gilt für jedes $a \in A$

$$a f [f(a)] f^{\mathrm{op}} a$$

woraus sofort $\boldsymbol{id}_A \subseteq f; f^{\mathrm{op}}$ folgt.

Aufgrund der Einwertigkeit von f gilt weiterhin

$$b f^{\mathrm{op}} a f c \quad \text{impliziert} \quad b = f(a) = c$$

woraus sofort $f^{\mathrm{op}}; f \subseteq \boldsymbol{id}_B$ folgt.

($\Longleftarrow$) Aus $\boldsymbol{id}_A \subseteq R;S$ folgt nach Definition der Relationenkomposition die Totalität von R, denn zu jedem $a \in A$ existiert mindestens ein $b \in B$ mit $aRbSa$.

Gilt außerdem aRc, dann folgt $bSaRc$ und wegen $S;R \subseteq \boldsymbol{id}_B$ somit $b = c$. Also ist R auch einwertig.

Wenden wir $(-)^{\mathrm{op}}$ auf obige Bedingungen an, so erhalten wir

$$(\boldsymbol{id}_A)^{\mathrm{op}} = \boldsymbol{id}_A \subseteq S^{\mathrm{op}}; R^{\mathrm{op}} \quad \text{und} \quad R^{\mathrm{op}}; S^{\mathrm{op}} \subseteq \boldsymbol{id}_B = (\boldsymbol{id}_B)^{\mathrm{op}}$$

Damit ist S^{op} ebenfalls eine Funktion. Da für jedes $a \in A$ ein $b \in B$ existiert mit $aRbSa$, muß b sowohl der Funktionswert von a unter R wie auch unter S^{op} sein, also gilt $S = R^{\mathrm{op}}$.

Hausaufgabe 3 [5 PUNKTE]

Terme: Etwa in Klasse 8 dürften in niedersächsischen Gymnasien *Terme* der Arithmetik (vermutlich über der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen) aufgetreten sein, z.B. $(2 \cdot x + 5)$ oder $(3 + -x)(x + 2)$. Verglichen mit den Termen der universellen Algebra aus Anhang A sind folgende Punkte zu beachten:

- Neben den *formalen Funktionssymbolen* oder *Operatoren* $+$, $\cdot$, $-$ treten unendlich viele Konstanten $q \in \mathbb{Q}$ auf; die zugrundeliegende Signatur $\mathcal{S}$ ist also gegeben durch

$$+_{/2}\ ,\ \cdot_{/2}\ ,\ -_{/1} \text{ und } q_{/0} \quad \text{für alle} \quad q \in \mathbb{Q}$$

- Für eine Menge von Variablen $\mathcal{V}$ ensteht die Menge $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ induktiv wie folgt:
  - ∗ jede Variable $x \in \mathcal{V}$ ist ein Term;
  - ∗ jede Konstante $q \in \mathbb{Q}$ ist ein Term;
  - ∗ für jeden Term t ist auch $-t$ ein Term;
  - ∗ für je zwei Terme t und u ist auch $(t + u)$ ein Term;
  - ∗ für je zwei Terme t und u ist auch $(t \cdot u)$ ein Term.
- Man ist hauptsächlich an der kanonischen Interpretation dieser Signatur in der Menge $\mathbb{Q}$ selbst interessiert:
  - ∗ jede Konstante $q \in \mathbb{Q}$ interpretiert sich selbst, also als $q \in \mathbb{Q}$;
  - ∗ die übrigen Operatoren werden als die üblichen Funktionen interpretiert:
    - $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{+} \mathbb{Q}$ (Addition),
    - $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}$ (Multiplikation), sowie
    - $\mathbb{Q} \xrightarrow{-} \mathbb{Q}$ (Multiplikation mit -1)
- Um einen Term wie z.B. $(x + 3) \cdot y$ *auswerten* zu können, benötigt man eine Belegung aller (im Term auftretenden) Variablen mit rationalen Zahlen.
- Die Signatur erlaubt auch eine kanonische Interpretation in der Menge $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ aller Terme:
  - ∗ jede Konstante $q \in \mathbb{Q}$ interpretiert sich selbst, also als $q \in \mathbb{Q}$;
  - ∗ die übrigen Operatoren werden als als Funktionen
    - $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \times \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \xrightarrow{+} \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, $t_0 + t_1 := (t_o + t_1)$;
    - $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \times \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \xrightarrow{\cdot} \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, $t_0 \cdot t_1 := (t_o \cdot t_1)$; sowie
    - $\boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \xrightarrow{-} \boldsymbol{Term}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$, $-t := -t$

    interpretiert.

  [5 PUNKTE] Welches Problem bzgl. der Interpretation in $\mathbb{Q}$ tritt auf, wenn man die Signatur $\mathcal{S}$ um einen 2-stelligen Operator $/_{/2}$ erweitert, der die Division formalisieren soll? Wie kann man das umgehen?

Lösungsvorschlag:

Die Interpretation der Signaturkomponenten sollen Funktionen sein, aber die Division ist nur eine *partielle Funktion* von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$, denn Division durch 0 ist nicht definiert.

(1) Man kann diese Einschränkung aufheben und partielle Funktionen als Interpretation der Operatoren zulassen, muß dann aber die Universelle Algebra entsprechend anpassen, was recht aufwändig ist. Es ist z.B. nicht unmittelbar klar, was an Stelle des Rekursionssatzes treten soll.

(2) Oder man kann auf die Interpretation der erweiterten Signatur in $\mathbb{Q}$ verzichten und stattdessen die um ein Symbol "undefiniert" erweiterte Menge $\mathbb{Q} + \{\perp\}$ betrachten, und auf dieser $p/q := \perp$ definieren, sofern $\perp \in \{p, q\}$ oder $q = 0$ gilt.

Natürlich sind dann auch die Operationen $+$ und $\cdot$ sowie die Multiplikation mit -1 auf diese größere Menge zu erweitern. Das jeweilige Ergebnis soll genau dann $\perp$ sein, wenn mindestens ein Argument $\perp$ ist. [Die zweite Variante genügt für die volle Punktzahl.]

Hausaufgabe 4 [6 PUNKTE]

Zeigen oder widerlegen Sie: Jede transitive symmetrische volle Relation ist reflexiv.

Lösungsvorschlag:

$A \xrightarrow{R} A$ sei transitiv, symmetrisch und voll. Zu zeigen: aRa für jedes $a \in A$. Wähle ein generisches Element $a \in A$.

- Wegen der Vollheit existiert $b \in A$ mit aRb.
- Wegen der Symmetrie gilt dann auch bRa.
- Wegen $aRbRa$ liefert die Transitivität liefert dann aRa.

Dieser für Mathematiker typische doch recht informelle Beweis setzt die Kenntnis der Definitionen und bestimmter Schlußregeln voraus, die i.A. nicht explizit gemacht werden. Er ist aber nicht maschinen-lesbar, und in dieser Form vermutlich auch nicht von einerm Programm erzeugt worden.

Wir werden später in der Vorlesung einen algorithmisch erzeugten Beweis der obigen Behauptung kennenlernen (mit Hilfe der Tableaux-Methode der Prädikatenlogik), der dementsprechend völlig explizit ist.

Hausaufgabe 5 [20 PUNKTE]

Stabilität der Eigenschaften von Relationen:

(a) [10 PUNKTE] (Vergl. Folie 22) Gegeben sind eine Menge $\mathcal{R}$ von Relationen $B \xrightarrow{R} B$, $B \xrightarrow{S} B$, $B \xrightarrow{T} B$... Sind alle diese Relationen

- reflexiv, bzw.
- transitiv, bzw.
- symmetrisch, bzw.
- anti-symmetrisch, bzw.
- total,

gilt dies ebenfalls für ihren Durchschnitt $B \xrightarrow{\bigcap \mathcal{R}} B$ bzw. für ihre Vereinigung $B \xrightarrow{\bigcup \mathcal{R}} B$? Begründen Sie Ihre Antwort; im negativen Fall genügt ein Gegenbeispiel mit zwei Relationen.

(b) [5 PUNKTE] Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a) und ohne den Satz auf Folie 24 zu verwenden: zu jeder Relation $B \xrightarrow{R} B$ existiert eine bzgl. Mengeninklusion $\subseteq$ kleinste Äquivalenzrelation $B \xrightarrow{E} B$, die R enthält.

(c) [5 PUNKTE] Finden Sie analog zum Lemma auf Folie 24 eine elementfreie Charakterisierung anti-symmetrischer Relationen.

Lösungsvorschlag:

(a) – Gilt $\langle x,x\rangle \in R$ für alle $x \in X$ und alle $R \in \mathcal{R}$, dann auch $\langle x,x\rangle \in \bigcap$ sowie $\langle x,x\rangle \in \bigcup\mathcal{R}$. Damit ist Reflexivität stabil unter Durchschnitten und Vereinigungen.

– Folgt für alle $x,y,z \in X$ aus $\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle \in R$ auch $\langle x,z\rangle \in R$ für alle $R \in \mathcal{R}$, dann folgt aus $\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle \in \bigcap R$ auch $\langle x,z\rangle \in \bigcap R$, also ist Transitivität stabil unter Durchschnitten.

Andererseits sind z.B. die Relationen $R = \{\langle 0,1\rangle\}$ und $S = \{\langle 1,0\rangle\}$ auf $\mathbb{B}$ trivialerweise transitiv, aber die Vereinigung $R \cup S$ ist es nicht.

– Folgt für alle $x,y \in X$ aus $\langle x,y\rangle \in R$ auch $\langle y,x\rangle \in R$ für alle $R \in \mathcal{R}$, dann folgt aus $\langle x,y\rangle \in \bigcap\mathcal{R}$ auch $\langle y,x\rangle \in \bigcap\mathcal{R}$, also ist Symmetrie stabil unter Durchschnitten.

Andererseits existiert für $\langle x,y\rangle \in \bigcup\mathcal{R}$ mindestens ein $R \in \mathcal{R}$ mit $\langle x,y\rangle \in R$, folglich $\langle y,x\rangle \in R$, und damit $\langle y,x\rangle \in \bigcup\mathcal{R}$. Also ist Symmetrie auch stabil unter Vereinigungen.

– Folgt für alle $x,y \in X$ aus $\langle x,y\rangle \in R$ und $\langle y,x\rangle \in R$ auch $x = y$ für alle $R \in \mathcal{R}$, dann folgt aus $\langle x,y\rangle \in \bigcap R$ und $\langle y,x\rangle \in \bigcap R$ auch $x = y$. Also ist Anti-Symmetrie stabil under Durchschnitten.

Dasselbe Beispiel wie für die Transitivität zeigt, dass Anti-Symmetrie unter Vereinigungen nicht stabil zu sein braucht.

– Im Hinblick auf die Charakterisierung der Totalität auf Folie 24 ist klar, dass sie stabil unter Vereinigungen ist.

Andererseits ist $X = \{a,b,c\}$ durch $aRbRc$ sowie $cSaSb$ plus Reflexivität jeweils total geordnet. Aber weder $\langle a,c\rangle$ noch $\langle c,a\rangle$ gehören zum Durchschnitt, der somit nicht total ist.

(b) Bilde den Durchschnitt aller Äquivalenzrelationen, die R enthalten. $B \times B$ ist eine davon, die größte. Nach Teil (a) ist dieser Durchschnitt wieder eine ÄR.

(c) $R \cap R^{\mathrm{op}} \subseteq \boldsymbol{id}_B$.

And now for something completely different:

Hausaufgabe 6 [0 PUNKTE]

Überzeugen Sie sich selbst vom beklagenswerten Zustand der Logik im Mittelalter, speziell hinsichtlich der Identifizierung von Hexen, in folgendem halbdokumentarischen Film:

`https://www.youtube.com/watch?v=yp_l5ntikaU`

Versuchen Sie, das Argument von Bedevere zu formalisieren. Im Laufe der Vorlesung sollten einige Fehler deutlich werden (kein Problem, wenn Sie die jetzt noch nicht finden).